ANÁLISIS REAL $\#1$

# PRELIMINARES

## LA IDEA DE "ANÁLISIS"

*1.1.* La diferencia entre el "Análisis Matemático" y las partes "discretas" de las Matemáticas se estriba en el uso de *límites* para definir los objetos de estudio. Se vuelve aún más interesante cuando se estudian límites de límites. Por ejemplo, sea

$$a_{mn} = \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

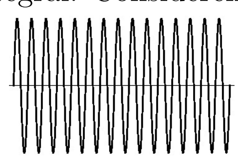
Entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{mn} &= \lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m}\right)^0 = \lim_{m\to\infty} 1 = 1,\\
\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_{mn} &= \lim_{n\to\infty} 0^{1/n} = \lim_{m\to\infty} 0 = 0.
\end{aligned}$$

(Para intercambiar el orden de los límites harían falta más hipótesis.)

Un tipo especial de límite es la integral. Consideremos

$$\int_a^b \operatorname{sen} nt\,dt$$



Claramente

$$\int_a^{a+2\pi/n} \operatorname{sen} nt\,dt = \int_{na}^{na+2\pi} (\operatorname{sen} s)\,\frac{ds}{n} = \frac{1}{n}\cdot 0 = 0,$$

entonces para $n$ grande podemos romper la integral original en $\displaystyle\int_{a_j}^{a_{j+1}}$ mediante $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n < b$ con $a_{j+1} - a_j = 2\pi/n$, y $b - a_n < 2\pi/n$. Todas son cero, y la integral sobre el último intervalo es

$$\left|\int_{a_n}^b \operatorname{sen} nt\,dt\right| \le |b - a_n|\cdot 1 \le \frac{2\pi}{n},$$

lo cual tiende a cero cuando $n \to \infty$, luego

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \operatorname{sen} nt\, dt = 0.$$

Sin embargo, $\int_a^b (\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen} nt)\, dt$ no tiene sentido porque el integrando $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen} nt$ no existe cuando $t$ no es múltiplo de $\pi$. Así no se tiene "$\int \lim = \lim \int$" en general.

## LA IDEA DE "MEDIDA"

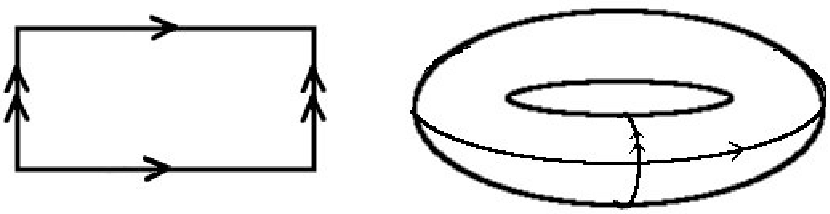
(Aquí platicaremos sobre por qué puede ser interesante desarrollar el concepto de medida, y algunas de las nociones que le están asociadas.)

*1.2.* En diferentes ramas de las matemáticas es necesario calcular áreas y volúmenes de conjuntos irregulares. En particular la frontera de un abierto puede ser muy complicada. Por ejemplo:

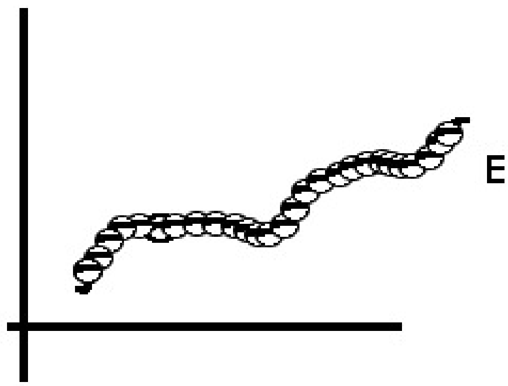
Teorema. (Osgood 1903) Existe una curva de Jordan en el plano que tiene área positiva.

La curva de Jordan encierra un abierto acotado, y tiene afuera un abierto no-acotado. Si uno quiere integrar una función sobre todo el plano considerando por separado estos dos abiertos, *no* se puede hacer caso omiso del área de la curva misma.

Se puede construir un toro (superficie de género 1) identificando los lados opuestos de un rectángulo. Al hacer integrales sobre la superficie, es importante saber cuándo se puede hacer caso omiso de la duplicación de aristas. (Si los lados fueran tramos de curvas de Osgood, no se podría.)



Pensemos en $\mathbb{R}^n$. Un subconjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ se llamará (sólo por ahora) nulo si se puede cubrir con una colección contable de $n$-esferas (se podría usar $n$-cubos) de volumen total arbitrariamente pequeño.




(El teorema de Osgood puede precisarse: su curva de Jordan no es nula.)

Proposición. (i) Todo subconjunto contable de $\mathbb{R}^n$ es nulo.
(ii) Un abierto no vacío en $\mathbb{R}^n$ no es nulo.

*1.3.* Un ejemplo importante de un conjunto "complicado": el conjunto de Cantor. Dado $0 \leq x \leq 1$, escribiremos

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1/3); \\ 1, & x \in [1/3, 2/3); \\ 2, & x \in [2/3, 1]. \end{cases}$$

Luego tomando $b_1 = x$ se definen recursivamente

$$a_n = \alpha(b_n), \quad b_{n+1} = 3b_n - a_n.$$

La expansión ternaria de $x$ es $(.a_1 a_2 \cdots)_3$. Se puede verificar que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n}.$$

Finalmente se define el conjunto de Cantor

$$C = \{x \in [0,1] \colon\ (\forall n)\ a_n(x) \neq 1\}$$

es decir, los puntos para los cuales $a_n \in \{0, 2\}$ para todo $n$.

El siguiente hecho fue una sorpresa cuando se descubrió:

Proposición. $C$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^1$ que es no-contable, y además es un conjunto nulo.

(Hay otros de "conjuntos de Cantor" que no son nulos, éste es el "clásico". Para un topólogo, cualquier cosa homeomorfa a $C$ es un "conjunto de Cantor".)

*1.4.* Un traslado de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es $A + x = \{a + x : \ a \in A\}$ para un $x \in \mathbb{R}$ fijo.

Diremos (por falta de más vocabulario) que un subconjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ embarra los racionales sobre los reales trasladando si
(1) los traslados $\mathbb{Q} + x$ son disjuntos para $x \in E$, y
(2) los traslados $\mathbb{Q} + x$, $x \in E$, cubren $\mathbb{R}$.
En otras palabras:

$$
\begin{array}{ll}
(1) & (\forall x, y \in E: \ x \neq y) \ \ (\mathbb{Q} + x) \cap (\mathbb{Q} + y) = \varnothing; \\
(2) & (\forall a \in \mathbb{R}) \ (\exists q \in \mathbb{Q}) \ (\exists x \in E) \quad q + x = a.
\end{array}
$$

La propiedad (1) también puede decirse: la diferencia entre dos elementos distintos de $E$ no está en $\mathbb{Q}$.

Lema. Sea $E \subset \mathbb{R}$ un subconjunto que embarra $\mathbb{Q}$ sobre $\mathbb{R}$. Definamos $E_1 = E \bmod 1 = \{x - [x]\colon \ x \in E\}$. Entonces $E_1$ también embarra $\mathbb{Q}$ sobre $\mathbb{R}$. (Aquí $[x]$ denota la parte entera de $x$)

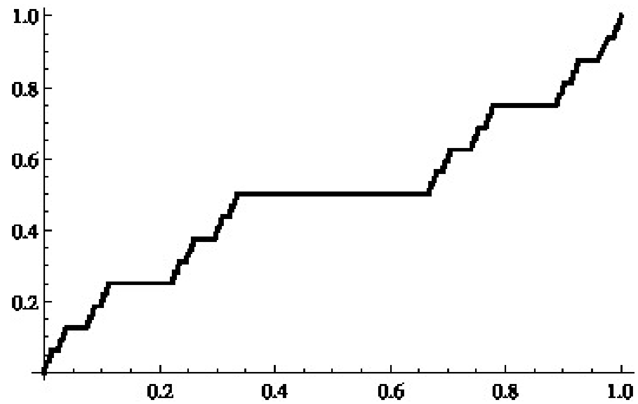
Demostración. (1) Sean $x, y \in E$ distintos. Con $x_1 = x - [x]$, $y_1 = y - [y]$, tenemos $x_1 - y_1 = (x - y) - ([x] + [y]) \notin \mathbb{Q}$ porque $x - y \notin \mathbb{Q}$.
(2) Todo $a \in \mathbb{R}$ es $a = q + x = (q + [x]) + (x - [x]) \in \mathbb{Q} + E_1$ (donde $q \in \mathbb{Q}$, $x \in E$). $\square$

Teorema. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Si $A$ no es nulo, entonces $A$ contiene un subconjunto que embarra $\mathbb{Q}$ sobre $\mathbb{R}$.

*1.5.* La función de Cantor $f_c$. Dado $x \in [0, 1]$, sea $(.a_1 a_2 \cdots)_3$ su expansión ternaria. Cuando $x \notin C$, sea $n$ el mínimo índice para el cual $a_n(x) = 1$. Definimos

$$
f_c(x) = \begin{cases} (.\,a_1'\,a_2' \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots )_2, & x \in C \\ (.\,a_1'\,a_2' \ \cdots a_{n-1}' \ 1 \ 0 \ \cdots )_2, & x \notin C, \end{cases}
$$

en donde escribimos $a_k' = a_k/2 \in \{0, 1\}$.




Proposición. $f_c$: $[0,1] \to [0,1]$ es una función continua y sobreyectiva. Es monótona pero no estríctamente creciente.

Proposición. Para cada $x \in [0,1] \setminus C$, $f_c$ es diferenciable en $x$ y $f'(x) = 0$. (Recordemos que $[0,1] \setminus C$ es abierto.)

Como conclusión de lo anterior (usando algunas ideas de "medida"),

$$\int_0^1 f_c'(x)\,dx = \int_{[0,1]-C} f_c'(x)\,dx = \int_{[0,1]-C} 0\,dx = 0 \neq 1 = f_c(1) - f_c(0)$$

contrario a lo que uno pensaría con el Teorema Fundamental del Cálculo.

(Ustedes aprenderán a manejar los anteriores temas, con un vocabulario más apropiado, durante este este curso.)

*1.6.* Para precisar las ideas anteriores queremos definir una noción llamada "medida" $\mu$, análoga a longitud o área o volumen, que satisfaga

$$\begin{aligned} \mu(\ \bigcup A_n\ ) &= \sum \mu(A_n) \text{ cuando } A_1, A_2, \ldots \text{ son disjuntos;} \\ \mu(\ [a,b]\ ) &= b - a; \\ \mu(\ A + x\ ) &= \mu(A). \end{aligned}$$

Una idea básica es que no se podrá esperar sumar $\mu(\cdot)$ sobre colecciones no contables: dado cualquier conjunto $A$, cada punto $x \in A$ debe tener $\mu(\{x\}) = 0$, por lo que no podríamos esperar que $\mu(A)$ fuera la "suma" de estos valores 0.

Como consecuencias de estas propiedades tendríamos dos hechos para justificar el razonamiento sobre $\int_0^1 f_c'\,dx$ (Todavía nos falta definir integral, entre muchas otras cosas):

$$A \text{ nulo } \implies \mu(A) = 0;$$

$$A \text{ nulo } \implies \int_{x \in A} f(x)\, dx = 0.$$

*1.7.* Supongamos que $E$ es un conjunto que embarra $\mathbb{Q}$ sobre $\mathbb{R}$, $E \subset [0,1]$. Escribamos $P = [0,2] \cap \mathbb{Q}$. Si $a \in [1,2] \subseteq \mathbb{R}$, podemos escribir $a = q + x$ con $q \in \mathbb{Q}$, $x \in E$ .
De esto, $q = a - x \in [0,2]$, por lo que $q \in P$.
Esto muestra que

$$[1,2] \subseteq E + P = \bigcup_{q \in P} (E + q) = \bigcup_{x \in E} (P + x).$$

Pero se supone que $\mu(E+q) = \mu(E)$, y los $E+q$ son disjuntos, luego

$$1 = \mu([1,2]) \leq \mu(E+P) = \sum_{q \in P} \mu(E+q) = \sum_{q \in P} \mu(E).$$

Estas sumatorias son contables. Ahora bien, no puede ser que $\mu(E) = 0$ porque esto daría

$$1 \leq \sum 0 = 0.$$

Pero tampoco puede ser que $\mu(E) > 0$, lo cual daría

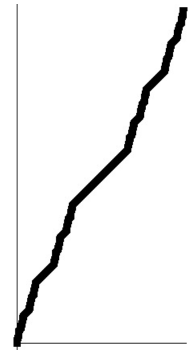
$$3 = \mu([0,3]) \geq \mu(E+P) = \sum_{q \in P} \mu(E) = \infty$$

por ser $P$ un conjunto infinito.

La conclusión: *no es posible definir la función $\mu$ como se indicaba.* En otras palabras, la idea intuitiva de "área" no puede definirse para subconjuntos arbitrarios de $\mathbb{R}$ como uno podría imaginarse. Una salida de la dificultad es de evitar definir $\mu$ para los conjuntos que embarran.

*1.8.* Veremos más adelante que sí se puede definir $\mu$ para los conjuntos borelianos: $\mathcal{B}$ = la mínima familia de conjuntos que contiene todos los abiertos, a la vez de ser cerrada bajo complementos y bajo uniones contables.

Teorema. Ningún conjunto boreliano embarra.



*1.9.* Volvamos a la función de Cantor. Escribamos

$$g(x) = f_c(x) + x.$$

Para $x \in [0,1] \setminus C$ tenemos $g'(x) = f_c'(x) + 1 = 1$. La función $g\colon [0,1] \to [0,2]$ es continua y estríctamente creciente, y satisface $g(0) = 0$, $g(1) = 2$. De esto se sigue que $g$ es un homeomorfismo. Ahora consideremos los subconjuntos complementarios

$$\begin{aligned} g(C) &\subseteq [0,2], \\ g(\,[0,1] \setminus C\,) &\subseteq [0,2]. \end{aligned}$$

Cada intervalo que forma $[0,1] \setminus C$ es enviado por $g$ a un intervalo en $[0,2]$ de la misma longitud. La suma de estas longitudes es 1. Por eso

$$\mu(g(C)) = 1 = \mu(\ g([0,1] \setminus C)\ ).$$

La conclusión es que $g$ es un homeomorfismo que envía un conjunto nulo a un conjunto no-nulo. (*La propiedad de ser nulo* no *es un invariante topológico.*)

*1.10.* Pasan cosas aún peores. Por ser $g(C)$ no nulo, contiene (según algo que no hemos demostrado) un conjunto $B$ que embarra $\mathbb{Q}$ sobre $\mathbb{R}$,

$$B \subseteq g(C) \subseteq [0,2].$$

La preimagen de $B$ bajo $g$ es

$$A = g^{-1}(B) \subseteq C \subseteq [0,1].$$

<u>Proposición.</u> $A$ no es un conjunto boreliano.

<u>Demostración.</u> Supongamos que $A$ fuera boreliano. Entonces como $g$ es un homeomorfismo, la imagen $B = g(A)$ tambien sería boreliana y entonces no podría embarrar. Por esta contradicción, $A$ no es boreliano. $\square$

Entonces un conjunto nulo puede contener un conjunto no boreliano.

*1.11.* La idea de Lebesgue fue de definir una medida $\mu$ en la mayor colección de conjuntos $\mathcal{L}$ posible. Esta $\mathcal{L}$ contiene todos los subconjuntos de todos los conjuntos nulos. En el ejemplo arriba, $A \subseteq C$ donde $C$ es un conjunto nulo, por lo que $A \in \mathcal{L}$. Esto significa que se puede definir $\mu(A)$. Pero $A \notin \mathcal{B}$. Así $\mathcal{L} \underset{\neq}{\supset} B$; es decir, Lebesgue consideró una colección de conjuntos más amplia que los borelianos.

*1.12.* Lógica. Las *proposiciones* (expresiones que nos interesa si son verdaderas o falsas) pueden depender de variables, $P(x, y, \ldots)$. Las operaciones básicas para crear nuevas proposiciones de otras se escriben de diversas formas,

| | | |
|---|---|---|
| $P$ y $Q$ | $P \wedge Q$ | $P, Q$ |
| $P$ ó $Q$ | $P \vee Q$ | |
| no $P$ | $\tilde{}P$ | $\sim P$ |
| si $P$, entonces $Q$ | $P \implies Q$ | |
| $P(x)$ para todo $x$ | $(\forall x)\ P(x)$ | |
| $P(x)$ para algún $x$ | $(\exists x)\ P(x)$ | |

(Se puede causar confusiones cuando se mezcla la notación precisa con la forma platicada, por ejemplo "Si $a = b \implies 2a = 2b$" debería ser escrito como "$a = b \implies 2a = 2b$" o "Si $a = b$ entonces $2a = 2b$".)

*1.13.* Conjuntos. Hay nociones básicas (no definidas) "$\in$", "$=$". Dado un conjunto $X$ se definen subconjuntos por medio de propiedades,

$$A = \{x \in X\colon\ P(x)\}.$$

Esto describe una correspondencia entre las proposiciones $P$ sobre elementos de $X$ y los subconjuntos $A$ de $X$. Dado el conjunto $A$ podemos llegar a la proposición $P$ definiendo "$P(x)$ se considera verdadera precisamente cuando $x \in A$". Se escribe $\varnothing$=conjunto vacío.

<u>Definición.</u>
$$A \cap B = \{x\colon\ x \in A,\ x \in B\},$$
$$A \cup B = \{x\colon\ x \in A \text{ ó } x \in B\},$$

y de manera similar se definen la diferencia conjuntista $A \backslash B$ ó $A \setminus B$, el producto cartesiano $A \times B$, la unión

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

de una familia indexada de conjuntos, etc. Se escribe $A \subseteq B$ cuando $(\forall x)\, x \in A \implies x \in B$.

<u>Definición.</u> $\mathcal{P}(X) =$ conjunto potencia de $X = \{A\colon\ A \subseteq X\}$.

Definición. Una familia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es un álgebra de subconjuntos de $X$ si $\varnothing \in \mathcal{A}$ y
(i) $(\forall A, B \in \mathcal{A})\ A \cup B \in \mathcal{A}$,
(ii) $(\forall A \in \mathcal{A})\ X \setminus A \in \mathcal{A}$,
(iii) $(\forall A, B \in \mathcal{A})\ A \cap B \in \mathcal{A}$.
($\mathcal{A}$ es cerrada bajo $\cup$, $\setminus$, $\cap$.)

Definición. Una álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $X$ es una $\sigma$-álgebra de subconjuntos de $X$ si para toda sucesión $\{A_n\}$ en $\mathcal{A}$, se tiene $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. ("$\mathcal{A}$ es cerrada bajo uniones contables.")

Proposición. Dada $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$, hay una mínima álgebra que contiene a $\mathcal{C}$. Asimismo hay una mínima $\sigma$-álgebra que contiene a $\mathcal{C}$.
("mínima" se refiere a la relación $\subseteq$.)
Se dice que es generada por $\mathcal{C}$.

Proposición. Dada un álgebra $\mathcal{A} \subseteq X$ y dada una sucesión $\{A_n\} \subseteq \mathcal{A}$, existe una sucesion $\{B_n\} \subseteq \mathcal{A}$ tal que

$$m \neq n \implies B_m \cap B_n = \varnothing, \qquad \text{(los } B_n \text{ son disjuntos)},$$

$$\bigcup_{n=1}^{N} B_n = \bigcup_{n=1}^{N} A_n$$

para todo $N$.
(Al probarlo no olvidar asegurar que $B_n \in \mathcal{A}$.)

*1.14.* Relaciones y Funciones.

Definición. Una relación en un conjunto $X$ es un subconjunto $R \subseteq X \times X$. Se escribe $aRb$ ("$a$ es $R$-relacionado con $b$") cuando $(a, b) \in R$. En casos particulares de relaciones se usan diversos símbolos como $\equiv\ \cong\ \sim\ \prec\ \perp$ en lugar de $R$.

Definición. Una relacion $\sim$ se llama

| | | |
|---|---|---|
| reflexiva | si | $(\forall a \in X)\ a \sim a$ |
| simétrica | si | $(\forall a, b \in X)\ a \sim b \implies b \sim a$ |
| transitiva | si | $(\forall a, b \in X)\ a \sim b,\ b \sim c \implies a \sim c$ |
| antisimétrica | si | $(\forall a, b \in X)\ a \sim b,\ b \sim a \implies a = b$ |

Una relación de equivalencia es una relación que es reflexiva, simétrica y transitiva.
Cuando $\sim$ es una relación de equivalencia en $X$,
la clase de equivalencia de $x \in X$ es $[x] = \{y \in X\colon\ y \sim x\}$.

Proposición. Dada una relación de equivalencia en $X$, y dados $x, y \in X$, se tiene o bien $[x] = [y]$ o bien $[x] \cap [y] = \varnothing$.
(Las clases de equivalencia forman una partición de $X$.)
La colección de clases de equivalencias se puede denotar $X/\sim$ y se llama el espacio cociente (es un subconjunto de $\mathcal{P}(X)$).

Definición. Una función $f\colon X \to Y$ es un subconjunto de $X \times Y$ tal que
(i) $(\forall x \in X)(\exists y \in Y)\ (x, y) \in f$,
(ii) $(\forall x \in X,\ y_1, y_2 \in Y)\ (x, y_1) \in f,\ (x, y_2) \in f \implies y_1 = y_2$.
Se escribe $y = f(x)$ cuando $y$ es el (único) elemento de $Y$ tal que $(x, y) \in f$.

Definición. Sea $f\colon X \to Y$, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Entonces se escribe

$$\begin{aligned} f(A) &= \{y \in Y\colon\ (\exists x \in X)\ y = f(x)\} && \underline{\text{imagen}} \\ f^{-1}(B) &= \{x \in X\colon\ f(x) \in B\} && \underline{\text{preimagen}} \end{aligned}$$

Definición. $f\colon X \to Y$ es inyectiva si $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$.
Es sobre si $f(X) = Y$.
Es biyectiva si es inyectiva y sobre. Cuando es biyectiva, tiene una inversa $f^{-1}\colon Y \to X$.

*1.15.* Definición. Un orden parcial $\prec$ en $X$ es una relación que es reflexiva, transitiva y antisimétrica. Se llama un orden (u orden lineal) si $(\forall a, b \in X)\ a \prec b$ ó $b \prec a$.
Un elemento $a$ se llama un elemento mínimo si $(\forall x \in X)\ x \not\prec a$.
Un elemento $a$ se llama un primer elemento si $(\forall x \in X)\ a \prec x$.
Se dice que $\prec$ es un buen orden si cada subconjunto no vacío de $X$ tiene un primer elemento.

Principio del Buen Orden. Todo conjunto puede ser bien ordenado.

El producto cartesiano de dos conjuntos puede generalizarse a cualquier familia indexada de conjuntos $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$,

$$\bigtimes_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \;=\; \{f\colon \Lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \,:\; (\forall\lambda\in\Lambda)\; f(\lambda)\in X_\lambda\}.$$

Esto puede interpretarse como "la colección de todas las maneras de escoger un elemento de cada $X_\lambda$".

Axioma de la Elección. Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ cualquier familia indexada de conjuntos. Si $(\forall\lambda)\; X_\lambda \neq \varnothing$, entonces $\bigtimes_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \neq \varnothing$.

Se puede escribir $x_\lambda = f(\lambda)$ y decir que "escogemos" $x_\lambda \in X_\lambda$ para cada $\lambda$.

(No todos los matemáticos aceptan el uso del Axioma de la Elección ni el Principio del Buen Orden; en este curso se aplicarán cada vez que sea necesario.)

*1.16.* Se escribe $\mathbb{Z}^+ = \{1,2,3,\dots\}$, los números naturales. Definición. El conjunto $X$ es contable (numerable, denumerable) si es finito o si existe una biyección $\mathbb{Z}^+ \to X$.

Proposición. $X$ es contable $\iff$ existe una función de $\mathbb{Z}^+$ sobre $X$.

Nota. $\mathbb{Q}$ es contable. Cuando $X_n$ es contable para $n = 1,2,\dots$, también $\bigcup_1^\infty X_n$ es contable. El conjunto $\{f\colon \mathbb{Z}^+ \to \{0,1\}\,\}$ no es contable.

Proposición. Cualquier unión contable $\bigcup_{n=1}^\infty X_n$ de conjuntos contables $X_n$ es también contable.

*1.17.* Dada un orden parcial $\prec$ en $X$ y un subconjunto $A \subseteq X$, se dice que $x \in X$ es una cota superior para $A$ si $(\forall a\in A)\; a \prec x$.
Se dice que $x$ es una mínima cota superior para $A$ si
$(\forall y\colon\; y$ es cota superior para $A)\; x \prec y$.

Definición. El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es un campo ordenado completo:

- Campo:

$$\begin{array}{lll} x+0=x & 1\cdot x=x & -x+x=0 \\ x+y=y+x & x\cdot y=y\cdot x & x^{-1}\cdot x=1 \\ (x+y)+z=x+(y+z) & (x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z) & \end{array}$$

- Ordenado:
  $P\subseteq\mathbb{R}$, $(\forall x,y\in P)\ x+y\in P,\ xy\in P,\ -x\notin P$;

$$\mathbb{R}=-P\cup\{0\}\cup P.$$

  "$x<y$"significa $y-x\in P$.

- Completo: $(\forall A\subseteq\mathbb{R},\ A$ tiene una cota superior, $A\neq\varnothing)$ $(\exists x\in\mathbb{R})$ $x$ es mínima cota superior para $A$.

Definición. $\sup A=\begin{cases}\text{mínima cota superior de } A, & A \text{ acotado},\\ \infty, & A \text{ no acotado}.\end{cases}$
$\inf A=-\sup(-A)$.

Axioma de Arquímedes. $(\forall x,y\in\mathbb{R}\colon\ x<y)(\exists r\in\mathbb{Q})\ x<r<y$.

Definición. Números reales extendidos. $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$.
Se escribe $x+\infty=\infty$ para $x\neq-\infty$, y $0\cdot\infty=0$
($\mathbb{R}^*$ no es un campo.)

El orden en $\mathbb{R}$ nos permite definir $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ así como

$$\limsup x_n=\inf_n\sup_{k\geq n}x_k,$$

$$\liminf x_n=\sup_n\inf_{k\geq n}x_k.,$$

*1.18.* Un conjunto $A\subseteq\mathbb{R}$ es abierto si $(\forall a\in A)(\exists\epsilon>0)\ (a-\epsilon,a+\epsilon)\subseteq A$. (Notar que la notación $(x,y)$ es ambigua, se podría escribir $]x,y[$.)

Proposición. $A_1,A_2$ abiertos $\implies A_1\cap A_2$ abierto.
$A_\lambda$ abiertos $\implies\bigcup_\lambda A_\lambda$ abierto.

Proposición. $A \subseteq \mathbb{R}$ abierto $\implies (\exists \{a_n\}, \{b_n\})$ $(a_n, b_n)$ disjuntos, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$.

*1.19.* Proposición. Sea $\mathcal{A}$ un conjunto no contable y $f\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$. Supóngase que $(\forall x \in \mathcal{A})\ f(x) > 0$. Entonces

$$\sum_{x \in \mathcal{A}} f(x) = \infty$$

en el sentido de que para cualquier $M \in \mathbb{R}$, hay una collección finita $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ tal que

$$\sum_{x \in \mathcal{A}_0} f(x) > M.$$

ANÁLISIS REAL #2

# ESPACIOS MEDIBLES Y SUS MEDIDAS

*2.1.* Definición. Un espacio medible (measurable space) es un par $(X, \mathcal{F})$ donde $\mathcal{F}$ es una $\sigma$-álgebra de subconjuntos de un conjunto $X$. Un elemento de $\mathcal{F}$ se llama un conjunto medible. (La palabra "medible" en sí no se entendería cuando no se hubiera mencionado ya $\mathcal{F}$, o bien cuando hubiera más de una $\mathcal{F}$, en la discusión.)

Definición. Una medida $\mu$ en un espacio medible $(X, \mathcal{F})$ es una función $\mu\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}^*$ que satisface
(i) $\mu(\varnothing) = 0$;
(ii) $(\forall E \in \mathcal{F})\ \mu(E) \geq 0$;
(iii) $(\forall \{E_n\}_1^{\infty} \subseteq \mathcal{F} :\ \{E_n\}$ disjuntos) $\mu(\bigcup_1^{\infty} E_n) = \sum_1^{\infty} \mu(E_n)$.
Cuando $\mu$ es una medida en $(X, \mathcal{F})$ se dice que la terna $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio con medida (measure space).

La propiedad (iii) se conoce como "$\mu$ es una función contablemente aditiva". Cuando en lugar de (iii) se tiene
(iii′) $(\forall \{E_n\}_1^{N} \subseteq \mathcal{F},\ \{E_n\}$ disjuntos) $\mu(\bigcup_1^{N} E_n) = \sum_1^{N} \mu(E_n)$,
se dice que "$\mu$ es una función aditiva" (o "finitamente aditiva").

Ejemplo. La medida de contar en $\mathbb{Z}$: $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, $\mu(E) =$ número de elementos de $E$.

A veces es necesario trabajar con álgebras de subconjuntos de $X$. Se dirá que "$\mu$ es una medida en el álgebra $\mathcal{F}_0$" si satisface (i),(ii) y si
(iii$''$) $(\forall \{E_n\}_1^\infty \subseteq \mathcal{F}_0,\ \{E_n\}$ disjuntos tales que $\bigcup_1^\infty E_n \in \mathcal{F}_0)$
$\mu(\bigcup_1^\infty E_n) = \sum_1^\infty \mu(E_n)$.
(Así una "medida en un álgebra" no es una "medida".)

Ejemplo. Sea $\mathcal{F}_0 = \{$subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}\} \cup \{$complementos de subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}\}$ con la medida de contar.

*2.2.* Lema. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio con medida; sean $E, F \in \mathcal{F}$ con $E \subseteq F$. Entonces
(i) $\mu(E) \leq \mu(F)$;
(ii) Si $\mu(E) < \infty$, entonces $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$.

Proposición. $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio con medida.
(a) Sea $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$ con $E_n \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\mu\left(\bigcup_1^\infty E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

(b) Sea $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$ con $F_n \in \mathcal{F}$, y sea $\mu(F_1) < \infty$. Entonces

$$\mu\left(\bigcap_1^\infty F_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n).$$

Demostración. (a) Definamos $A_1 = E_1$ y $A_n = E_n \setminus E_{n-1}$ para $n > 1$. Entonces tenemos $A_n \in \mathcal{F}$, $A_n$ disjuntos, luego

$$\mu\left(\bigcup_1^\infty E_n\right) = \mu\left(\bigcup_1^\infty A_n\right) = \sum_1^\infty \mu(A_n) = \lim_{m\to\infty} \sum_1^m \mu(A_n)$$

$$= \lim_{m\to\infty} \mu\left(\bigcup_1^m A_n\right) = \lim_{m\to\infty} \mu(E_m)$$

(b) Sea $E_n = F_1 \setminus F_n$. Entonces $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$, luego por (a)

$$\mu\left(\bigcup_1^\infty E_n\right) \overset{\text{(a)}}{=} \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \lim(\mu(F_1) \setminus \mu(F_n)) = \mu(F_1) - \lim \mu(F_n).$$

Pero además $\bigcup_1^\infty E_n = F_1 \setminus \bigcap_1^\infty F_n$, luego $\mu\left(\bigcup_1^\infty E_n\right) = \mu(F_1) \setminus \mu(\bigcap_1^\infty F_n)$ y usando nuevamente que $\mu(F_1) < \infty$ se puede cancelar

$\mu(F_1)$ en la ecuación

$$\mu(F_1) \setminus \mu(\bigcap_1^\infty F_n) = \mu(F_1) - \lim \mu(F_n). \quad \square$$

*2.3.* <u>Problema.</u> En $\mathbb{R}$, queremos $\mu((a,b)) = b-a$. ¿Podemos extender esto a una medida en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$? Respuesta: no. La extenderemos a la familia más grande posible, los conjuntos Lebesgue-medibles.

Sea

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_0 &= \{\text{uniones finitas de conjuntos} \subseteq \mathbb{R} \text{ de la forma} \\
&\qquad (a,b],\ (-\infty,b],\ (a,\infty),\ \varnothing,\ \mathbb{R} = (-\infty,\infty)\} \\
\mathcal{B} &= \{\text{Borelianos}\} \\
&= \sigma\text{-álgebra generada por los abiertos en } \mathbb{R} \\
&= \sigma\text{-álgebra generada por } \mathcal{F}_0
\end{aligned}$$

Tendremos como meta obtener medidas en

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{L} \ \ (= \text{ conjuntos de Lebesgue}).$$

Definamos $l((a,b]) = b-a$. Dado que cada $A \in \mathcal{F}_0$ es una unión *disjunta* $A = \bigcup_{j=1}^n (a_j, b_j]$ (aunque no de forma única), podemos extender la definición de $l$ a todo $\mathcal{F}_0$, $l(A) = \sum_1^n (b_j - a_j)$.
(Más adelante verificaremos con detalle que $\mathcal{F}_0$ es un álgebra y que $l$ es una medida en $\mathcal{F}_0$.)

*2.4.* Por ahora sea $\mathcal{F}_0$ cualquier álgebra de subconjuntos de $X$, que es cualquier conjunto. Consideremos $(X, \mathcal{F}_0, \mu)$ donde $\mu$ es una medida *en el álgebra*. Queremos extender $\mu$ a una $\sigma$-álgebra que contenga a $\mathcal{F}_0$, por un proceso que se llama *completación*.

<u>Definición.</u> Una <u>medida exterior</u> en un conjunto $X$ es una función $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}^*$ que satisface
(a) $\mu^*(\varnothing) = 0$.
(b) $(\forall A \subseteq X)\ \mu^*(A) \geq 0$ (<u>no negativa</u>).
(c) $(\forall A \subseteq X :\ A \subseteq B)\ \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (<u>monótona</u>).
(d) $(\forall \{A_n\} \subseteq \mathcal{P}(X))\ \mu^*(\bigcup_1^\infty A_n) \leq \sum_1^\infty \mu^*(A_n)$ (<u>cont. subaditiva</u>).

Dada una medida $\mu$ en un álgebra $\mathcal{F}_0$ de subconjuntos de $X$, para cualquier $A \subseteq X$ se puede definir el conjunto de números

$$R(A) = \left\{ \sum_1^\infty \mu(E_j) \colon\ A \subseteq \bigcup_1^\infty E_j,\ E_j \in \mathcal{F}_0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^*$$

y luego

$$\mu^*(A) = \inf R(A).$$

(Nota. Se interpreta esta definición sin problema para incluir sucesiones finitas $\{E_j\}$, pues se extienden $E_1, E_2, \cdots, E_n, \varnothing, \varnothing, \cdots$.)
(Nota. $\mu^*$ no tiene que ser una medida.)

*2.5.* Ejercicio. Toda medida $\mu$ en un álgebra es subaditiva: si $B_n \in \mathcal{F}_0$, y si además $A = \bigcup B_n \in \mathcal{F}_0$, entonces $\mu(A) \leq \sum \mu(B_n)$.

Lema. Dada una medida $\mu$ en un álgebra $\mathcal{F}_0$ de subconjuntos de $X$, la función $\mu^*$ definida arriba es una medida exterior (la medida exterior generada por $\mu$, y satisface además

(e) $(\forall A \in \mathcal{F}_0)$ $\mu^*(A) = \mu(A)$ (es extensión de $\mu$).

Demostración. (a),(b),(c) son obvios.
(d) Sea $\epsilon > 0$. Para estimar $\mu^*(A_n)$ a partir de su definición, notemos que $\mu^*(A_n) + \epsilon/2^n > \inf R(A_n)$, por lo cual podemos tomar una sucesión $\{E_{nj}\}_{j=1}^\infty \subseteq \mathcal{F}_0$ de manera que

$$A_n \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty E_{nj}, \quad \sum_{j=1}^\infty \mu(E_{nj}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}.$$

De esto (y notando que los $E_{nj}$ cubren $\bigcup A_n$) tenemos

$$\mu^*(\bigcup_1^\infty A_n) \leq \sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty \mu(E_{nj}) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu^*(A_n) + \epsilon.$$

El resultado se tiene pues $\epsilon > 0$ es arbitrario.
(e) Sea $A \in \mathcal{F}_0$, luego $\mu^*(A) \leq \mu(A) + \mu(\varnothing) + \mu(\varnothing) + \cdots = \mu(A)$ (considerar $A \subseteq A \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots$).
Por otra parte supóngase $A \subseteq \bigcup E_j$, $E_j \in \mathcal{F}_0$. Entonces $A \cap E_j \in \mathcal{F}_0$ para cada $j$, a la vez que $A = \bigcup (A \cap E_j)$. Por el ejercicio de la subaditividad de la medida $\mu$ en el álgebra $\mathcal{F}_0$,

$$\mu(A) \overset{\text{sub.}}{\leq} \sum_1^\infty \mu(A \cap E_j) \ \leq\ \sum_1^\infty \mu(E_j).$$

Por hipótesis $\mu(A) \leq r$ para todo $r \in R(A)$, por lo que $\mu(A) \leq \mu^*(A)$. Tenemos entonces $\mu(A) = \mu^*(A)$. $\square$

Nota. Puntos que recordar. Una medida está definida en un $\sigma$-álgebra (a veces en un álgebra), una medida exterior está definida en *todos* los subconjuntos. En algunas situaciones hablamos de $\mu$ que determina su $\mu^*$, en otras hablamos de una $\mu^*$ que no viene de ninguna $\mu$.

*2.6.* Definición. Dada cualquier medida exterior $\mu^*$ en $X$, se dice que un subconjunto $E \subseteq X$ es $\mu^*$-medible si

$$(\forall A \subseteq X)\ \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E).$$

(Ojo. Esto dice que $E$ divide bien a todos los conjuntos, no al revés.)

*2.7.* Sea $\mathcal{F}_0$ cualquier álgebra con medida $\mu$. Sea $\mu^*$ su medida exterior. Escribimos

$$\mathcal{F}_0^* = \{E \subseteq X\colon\ E \text{ es } \mu^*\text{-medible}\}.$$

Nota. La notación $\mathcal{F}_0^*$ puede ser engañosa en el sentido de que esta familia de conjuntos depende de $\mu$ también.

Teorema. (de Extensión de Carathéodory)
(I) $\mathcal{F}_0^*$ es una $\sigma$-álgebra de subconjuntos de $X$;
(II) $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_0^*$;
(III) $\mu^*|_{\mathcal{F}_0^*}$ es una medida en $(X, \mathcal{F}_0^*)$.

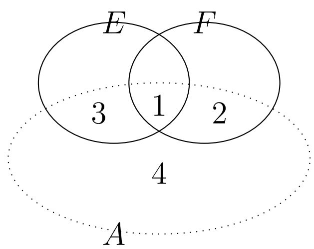
Nota. Si empezamos con alguna medida exterior $\mu^*$ en $X$, que no necesariamente fue determinada por alguna medida en alguna subálgebra de $\mathcal{P}(X)$, de todas formas se puede definir $\mathcal{F}_0^*$, y son válidos los incisos (I) y (III) del teorema.

Demostración. Vamos por pasos pequeños:
(a) $E \in \mathcal{F}_0^* \implies X \setminus E \in \mathcal{F}_0^*$. Esto se sigue de

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \setminus E) + \mu^*(A \cap E) = \mu^*(A \cap (X \setminus E)) + \mu^*(A \setminus (X \setminus E)).$$

(b) $\varnothing, X \in \mathcal{F}_0^*$. Se sigue de $\mu^*(A) = \mu^*(A) + \mu^*(\varnothing)$.

(c) $E, F \in \mathcal{F}_0^* \implies E \cap F \in \mathcal{F}_0^*$.
Para verificarlo, sea $A \subseteq X$, y escribir




$$\begin{aligned} C_1 &= A \cap (E \cap F), \\ C_2 &= (A \cap F) \setminus C_1, \\ C_3 &= (A \cap E) \setminus C_1, \\ C_4 &= A \setminus (E \cup F). \end{aligned}$$

Observemos que $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \setminus F)$ porque $F \in \mathcal{F}_0^*$. Esto puede escribirse

$$\mu^*(C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4) = \mu^*(C_1 \cup C_2) + \mu^*(C_3 \cup C_4).$$

Tenemos muchas fórmulas similares que escribir, así que la abreviamos: $1\ 2\ 3\ 4 \overset{(F)}{=} 1\ 2 \mid 3\ 4$. Entonces deducimos

$$1\ 2\ 3 \overset{(F)}{=} 1\ 2 \mid 3,$$

$$2\ 3\ 4 \overset{(F)}{=} 2 \mid 3\ 4,$$
$$1\ 2 \overset{(E)}{=} 1 \mid 2.$$

De estas relaciones se sigue que

$$1\ 2\ 3\ 4 \;=\; 1\ 2 \mid 3\ 4 \;=\; 1 \mid 2 \mid 3\ 4 \;=\; 1 \mid 2\ 3\ 4$$

que es lo que se tenía que demostrar.

(d) $\mathcal{F}_0^*$ es un álgebra. (Se sigue de (a),(b),(c).)

(e) $\mu^*$ es (finitamente) aditiva en $\mathcal{F}_0^*$. Sean $E, F \in \mathcal{F}_0^*$ con $E \cap F = \varnothing$. Entonces por el hecho $E \in \mathcal{F}_0^*$,

$$\mu^*(E \cup F) = \mu^*((E \cup F) \cap E) + \mu^*((E \cup F) \setminus E) = \mu^*(E) + \mu^*(F).$$

(f) $\mathcal{F}_0^*$ es cerrada bajo uniones contables. Tomemos $\{E_j\} \subseteq \mathcal{F}_0^*$. Podemos suponer que $E_j$ son disjuntos. Sea $E = \bigcup_1^\infty E_j$. Para cada $n$, sea $F_n = \bigcup_{j=1}^n E_j$. Entonces por (d), $F_n \in \mathcal{F}_0^*$.
Sea $A \subseteq X$ arbitrario. Tenemos

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \setminus F_n) = \sum_{j=1}^{n} \mu^*(A \cap E_j) + \mu^*(A \setminus F_n)$$

(para ver la última igualdad, cubrir $A \cap F_n$ con pedazos $C_1, C_2, \ldots C_n$ en $E_1, E_2, \ldots, E_n$ y complemento $C_0$, luego

$$12\cdots n0 \overset{1}{=} 1|23\cdots n0 \overset{2}{=} 1|2|3\cdots n0 \quad \cdots \quad \overset{n-1}{=} 1|2|3\cdots|n|0.)$$

Dado que $F_n \subseteq E$ tenemos $A \setminus E \subseteq A \setminus F_n$,
luego $\mu^*(A \setminus E) \leq \mu^*(A \setminus F_n)$, luego

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_j) + \mu^*(A \setminus E) \leq \mu^*(A). \tag{$*$}$$

Por ser medida exterior, $\mu*$ es contablemente subaditiva, luego

$$\mu^*(A \cap E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_j)$$

y (ojo: aún no sabemos si $E \in \mathcal{F}_0^*$)

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &\leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) \\ &\leq \sum_{1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_j) + \mu^*(A \setminus E). \end{aligned} \tag{$**$}$$

Al combinar $(*)$ con $(**)$ obtenemos

$$\mu^*(A) = \sum_1^\infty \mu^*(A \cap E_j) + \mu^*(A \setminus E) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) \quad (***)$$

lo cual dice $E \in \mathcal{F}_0^*$.

(g) $\underline{\mu^* \text{ es } \sigma\text{-aditiva en } \mathcal{F}_0^*}$. Tomemos $\{E_j\} \subseteq \mathcal{F}_0^*$ disjuntos, pongamos $E = \bigcup E_j$ como arriba, luego con $A = E$ en $(***)$,

$$\mu^*(\bigcup E_j) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) = \sum_1^\infty \mu^*(E_j) + 0.$$

Ahora podemos terminar la demostracion.
(I) se sigue de (d),(f).
(III) se sigue de (g).
(II) Sea $E \in \mathcal{F}_0$, necesitamos $E \in \mathcal{F}_0^*$. Sabemos que $\mu^*(E) = \mu(E)$ (por la parte (e) de un Lema). Sea $A \subseteq X$, luego por subaditividad

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$$

y queremos invertir $\leq$ en $\geq$. Para ello fijemos $\epsilon \geq 0$. Luego tomemos $\{F_n\} \subseteq \mathcal{F}_0$ de manera que $A \subseteq \bigcup F_n$, $\sum_1^\infty \mu(F_n) \leq \mu^*(A) + \epsilon$. Como $\mu^*$ es una medida exterior,

$$\mu^*(A \cap E) \leq \sum_1^\infty \mu(F_n \cap E), \quad \mu^*(A \setminus E) \leq \sum_1^\infty \mu(F_n \setminus E),$$

de lo cual

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) &\leq \sum_1^\infty [\mu(F_n \cap E) + \mu(F_n \setminus E)] = \sum \mu(F_n) \\ &\leq \mu^*(A) + \epsilon. \end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario se tiene el resultado. $\square$

## MEDIDAS COMPLETAS Y LA MEDIDA DE LEBESGUE

*2.8.* Definición. Un espacio con medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$ se llama completo si $\mathcal{F}$ contiene cada subconjunto de cada conjunto de medida cero:

$$(\forall E \in \mathcal{F}\colon\ \mu(E) = 0)\ (\forall F \subseteq E)\ F \in \mathcal{F}.$$

Si $\mathcal{F} = \mathcal{P}(X)$ entonces la medida es obviamente completa; pero hay otros ejemplos. El más importante: medida de Lebesgue.

Definición. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio con medida, y sea $\overline{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una $\sigma$-álgebra que contenga a $\mathcal{F}$. Sea $\overline{\mu}$ una medida en $(X, \overline{\mathcal{F}})$. Se dice que $(X, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu})$ es una completación de $(X, \mathcal{F}, \mu)$ si

$$\overline{\mu}\,|_{\mathcal{F}} = \mu \quad (\underline{\text{extensión}})$$

y si $(X, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu})$ es completo.

Ejemplo. (nuestra meta: medida de Lebesgue como completación de medida de Borel)

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{álg} & & \sigma\text{-álg} & & \sigma\text{-álg} & & \\
\mathcal{F}_0 & \subseteq & \mathcal{B} & \subseteq & \mathcal{L} & \subseteq & \mathcal{P}(X) \\
\mu = l & & \mu^*|_{\mathcal{B}} & & \mu^*|_{\mathcal{L}} & & \mu^* \\
 & & \text{medida} & & \text{completación} & & \text{(no-medida)}
\end{array}$$

*2.9.* Teorema. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ cualquier espacio con medida. Sea

$$\mathcal{Z} = \{Z \subseteq X\colon\ (\exists E \in \mathcal{F})\ Z \subseteq E,\ \mu(E) = 0\}$$

y sea

$$\overline{\mathcal{F}} = \{A = F \cup Z\colon\ F \in \mathcal{F},\ Z \in \mathcal{Z}\}.$$

Defínase $\overline{\mu}\colon \overline{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}^*$ por

$$\overline{\mu}(F \cup Z) = \mu(F) \quad (F \in \mathcal{F},\ Z \in \mathcal{Z}).$$

Entonces $\overline{\mu}$ está bien definida, y $(X, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu})$ es una completación de $(X, \mathcal{F}, \mu)$.

Para demostrarlo, hay que verificar que $F_1 \cup Z_1 = F_2 \cup Z_2 \implies \mu(F_1) = \mu(F_2)$; que $\overline{\mu}$ es una medida; que $\overline{\mu}$ es completa; que $\overline{\mu}|_{\mathcal{F}} = \mu$.

Nota. El Teorema muestra que siempre existe una completación, pero ésta no tiene por qué ser única.

Proposición. La medida $\mu^*$ en $\mathcal{F}_0^*$ dada por el Teorema de Extensión de Carathéodory es completa, no importa qué sean $X$, $\mathcal{F}_0$, $\mu$.

Si ya tuviéramos construida la medida de Borel (también llamada Borel-Lebesgue o Lebesgue-Borel) en $\mathcal{B}$, podríamos aplicar el proceso de completación para obtener la medida de Lebesgue. Sin embargo resulta más fácil técnicamente trabajar a partir de un álgebra generada por intervalos, y usar el Teorema de Extensión de Carathéodory.

*2.10.* Definición. Una medida $\mu$ se llama σ-finita en $X$ si $(\exists\{X_n\} \subseteq \mathcal{F})$ $X = \bigcup_1^\infty X_n,\ \mu(X_n) < \infty$.
(El término $\sigma$-finita se aplica tanto para una medida definida en una $\sigma$-álgebra como en un álgebra, como en el siguiente enunciado.)

Teorema. (de Extensión de Hahn) Sea $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{P}(X)$ un álgebra de subconjuntos de $X$. Sea $\mu$ una medida $\sigma$-finita en el álgebra $\mathcal{F}_0$. Entonces la extensión $\mu^*$ de $\mu$ a una medida en $\mathcal{F}_0^*$ es única.

Demostración. Sea $(X, \mathcal{F}_0^*, \nu)$ un espacio con medida tal que $\nu|_{\mathcal{F}_0} = \mu$.
Caso I. Primero suponemos que $\mu(X) < \infty$. Como $X \in \mathcal{F}_0$, tenemos

$$\nu(X) = \mu(X).$$

Ahora sea $E \in \mathcal{F}_0^*$. Para estimar $\mu^*(E)$ cubrimos E,

$$E \subseteq \bigcup_1^\infty E_n, \quad E_n \in \mathcal{F}_0.$$

Luego

$$\nu(E) \overset{\text{monot.}}{\leq} \nu(\bigcup_1^\infty E_n) \overset{\text{subad.}}{\leq} \sum_1^\infty \nu(E_n) = \sum_1^\infty \mu(E_n)$$

y al tomar el infimum sobre todas la cubiertas $\{E_n\}$,

$$\nu(E) \leq \inf R(E) = \mu^*(E).$$

Ahora

$$\begin{array}{rcccl} \nu(E) + \nu(X \setminus E) & = & \nu(X) & = & \mu^*(E) + \mu^*(X \setminus E) \\ \nu(X \setminus E) & & & \leq & \mu^*(X \setminus E) \\ \hline \nu(E) & & & \geq & \mu^*(E) \end{array}$$

(La resta se justifica porque los términos no son negativos y $\nu(X) < \infty$.) Se obtiene $\nu(E) = \mu^*(E)$, con $E \in \mathcal{F}_0^*$ arbitrario.

Caso II. Ya sin suponer que $\mu$ sea finita. Pongamos $X = \bigcup X_n$, $\mu(X_n) < \infty$. Se puede suponer que $X_n \subseteq X_{n+1}$. Sea $E \in \mathcal{F}_0^*$. Por el Caso I, $\nu(E \cap X_n) = \mu^*(E \cap X_n)$ (¡pensar en las hipótesis precisas para justificarlo!), luego

$$\nu(E) = \lim \nu(E \cap X_n) = \lim \mu^*(E \cap X_n) = \mu^*(\bigcup_1^\infty (E \cap X_n)) = \mu^*(E)$$

por lo que $\mu^*$, $\nu$ coinciden en $\mathcal{F}_0^*$. $\square$

*2.11.* Lo único que falta para construir $\mathcal{L}$={conjuntos de Lebesgue} es de construir el álgebra con medida. Sea $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{F}_0 = \Big\{ \bigcup_{j=1}^m I_j \Big\}$$

la colección de uniones finitas de intervalos de la forma $I_j = (a_j, b_j]$ ó bien $(-\infty, b_j]$, $(a_j, \infty)$, $(\infty, \infty)$. ($\varnothing$ es una unión vacía.)
Definamos

$$l(\ (a, b]\ ) = b - a.$$

Queremos

$$l(\bigcup_1^m I_j) = \sum_1^m l(I_j)$$

cuando los $I_j$ sean disjuntos. Hay que observar que $(a, c] \cup (c, b] = (a, b]$, por lo que un conjunto puede escribirse como $\bigcup I_j$ de muchas maneras (de hecho, de infinitas maneras, aún con uniones finitas). Sin embargo, no importa cómo se descomponga $(a, b]$ finitamente en $(a, c_1] \cup (c_1, c_2] \cup \cdots \cup (c_n, b]$, se tiene la misma suma

$$(c_1 - a) + (c_2 - c_1) + \cdots + (b - c_n) = b - a.$$

Esto implica que no importa cómo se descompone $I_j$ para definir $l(I_j)$.
Un conjunto general en $\mathcal{F}_0$ puede representarse como una unión de intervalos $(a_1, b_1], \ldots, (a_m, b_m]$ que no solamente son disjuntos, sino separados en el sentido de que

$$b_1 < a_2, \quad b_2 < a_3, \quad \cdots, \quad b_{m-1} < a_m.$$

Con lo anterior la representación del elemento de $\mathcal{F}_0$ es única y tenemos a $l$ definida en $\mathcal{F}_0$.

Teorema. Sean $\mathcal{F}_0$, $l$ definidas como arriba. Entonces $\mathcal{F}_0$ es un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$, y $l$ es una medida contablemente aditiva en el álgebra $\mathcal{F}_0$.

Demostración. $\mathcal{F}_0$ es cerrada bajo uniones finitas porque toda unión finita de uniones finitas es otra unión finita. También es cerrada bajo complementos porque la intersección de intervalos semicerrados es un intervalo semicerrado. Por lo tanto $\mathcal{F}_0$ es un álgebra de subconjuntos de $X$. Por definición

(i) $l(\varnothing) =$ suma vacía $= 0$;

(ii) $l(E) \geq 0$ para cada $E \in \mathcal{F}_0$.

La parte difícil es
(iii) Sean $E_n \subseteq \mathcal{F}_0$ disjuntos con $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}_0$. Entonces

$$l(\bigcup E_n) = \sum l(E_n).$$

Dados $E_n$ como mencionados en (iii), tenemos $\bigcup_1^{\infty} E_n = \bigcup_1^m I_j$ donde podemos suponer que los $I_j$ son disjuntos y de hecho separados. Cada $E_n$ es una unión finita $E_n = \bigcup E_{nk}$ de intervalos semiabiertos $E_{nk}$, que nuevamente podemos suponer disjuntos. Un $E_{nk}$ no puede tener puntos de dos $I_j$ diferentes, entonces cada $E_{nk}$ está contenido en un solo $I_j$. Ademas, la colección completa $\{E_{nk}\}_{n,k}$ es contable.

Por lo anterior basta verificar la aditividad con las suposiciones adicionales que todos los $E_n$ sean intervalos y que la unión $\bigcup_1^{\infty} E_n$ sea un solo intervalo, digamos $\bigcup_1^{\infty} E_n = I$ donde $I$ es un intervalo semicerrado. (Una vez verificado esto, sumaremos las igualdades para todos los $j$.) Entonces supondremos que

$$(a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n]$$

con los $(a_n, b_n]$ disjuntos. Nos supondremos que $-\infty < a < b < \infty$, dejando los casos de extremos $\pm\infty$ para pequeños ajustes en la argumentación. Un punto clave es que no hay forma de ordenar los $(a_n, b_n]$ de manera que $a_n < a_{n+1}$, solamente sabemos que es una colección contable (pensar en construcciones como el conjunto de Cantor, formadas de remover una sucesión de intervalos que no respetan el orden).

Nos interesa $\sum_1^{\infty} l(\,(a_n, b_n]\,)$, y para estudiar este valor primero examinaremos las sumatorias finitas. Dada cualquier subcolección finita de estos intervalos, podemos renumerar los índices para que

$$a \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \ \cdots \ a_{N-1} < b_{N-1} \leq a_N < b_N \leq b$$

(tal reenumeración no podrá hacerse con una colección infinita). Dado esto, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_1^N l(\ (a_n, b_n]\ ) &= \sum_1^N (b_n - a_n) = b_N - \sum_1^{N-1} (a_{n+1} - b_n) - a_1 \\ &\leq b_N - a_1 \leq b - a = l(\ (a, b]\ ), \end{aligned}$$

desigualdad que también es bastante evidente geométricamente. Con esta cota para la sumatoria finita, tenemos la misma cota para la sumatoria infinita,

$$\sum_1^\infty l(\ (a_n, b_n]\ ) \leq l(\ (a, b]\ ). \tag{$*$}$$

Ahora sea $\epsilon > 0$. Escríbase $\epsilon_n = 2^{-n}\epsilon$ de manera que $\sum \epsilon_n = \epsilon$.

Podemos encontrar alguno de los $a_n$ dentro de distancia $\epsilon_1$ de $a$; para facilitar la exposición cambiaremos los indices para llamarlo $a_1$, así $a_1 - \epsilon_1 < a$. Sea

$$\begin{aligned} \widetilde{I}_1 &= (a_1 - \epsilon_1, b_1 + \epsilon_1), \\ \widetilde{I}_n &= (a_n, b_n + \epsilon_n) \text{ para } n \geq 2. \end{aligned}$$

Entonces $\{\widetilde{I}_n\}$ es una cubierta del intervalo cerrado $[a, b]$ por abiertos, y tiene una subcubierta finita, digamos $[a, b] \subseteq \bigcup_1^N \widetilde{I}_{n_k}$. Nuevamente descartamos algunos de estos intervalos si es necesario y volvemos a reenumerar, para obtener

$$\begin{aligned} a_1 - \epsilon_1 &< a \leq a_1 \leq a_2 < b_1 + \epsilon_1 < \cdots \\ &< a_N < b_{N-1} + \epsilon_{N-1} \leq b \leq b_N + \epsilon_N. \end{aligned}$$

De esto

$$\begin{aligned} b - a &\leq (b_N + \epsilon_N) - (a_1 - \epsilon_1) \\ &\leq \sum_1^N \Big( (b_n + \epsilon_n) - a_n \Big) + \epsilon_1 \\ &\leq \sum_1^N (b_n - a_n) + (\epsilon + \epsilon_1). \end{aligned}$$

Como esto es válido para todo $\epsilon > 0$, tenemos

$$l(\,(a,b]\,) \leq \sum_{1}^{\infty} l(\,(a_n,b_n]\,). \qquad (**)$$

Al combinar (*) con (**) obtenemos la conclusión (iii), completando la demostración. □

*2.12.* La medida $l$ en el álgebra $\mathcal{F}_0$ generada por los intervalos semicerrados genera (T. Ext. Carathéodory) una medida exterior $l^*$ cuya restricción a la $\sigma$-algebra $\mathcal{L} = \mathcal{F}_0^*$ de conjuntos $l^*$-medibles (o Lebesgue-medibles) es una medida, llamada la medida de Lebesgue, que a veces llamaremos $\lambda\colon \mathcal{L} \to \mathbb{R}^*$.

Por el Teorema de Extensión de Hahn $\lambda$ es la única extensión de $l$ a $\mathcal{L}$ como medida.

Como $\mathcal{L}$ es una $\sigma$-álgebra que contiene todos los intervalos semicerrados, contiene todos los intervalos abiertos también. Por lo tanto contiene a los borelianos, $\mathcal{L} \supseteq \mathcal{B}$.

*2.13.* Ejemplo. Sea $\{q_n\}$ una sucesión densa en $\mathbb{R}$ (por ejemplo, $\{q_n\} = \mathbb{Q}$). Sea

$$I_n = (q_n - \frac{\epsilon}{2^{n+1}}, q_n + \frac{\epsilon}{2^{n+1}}),$$

intervalo de longitud $\epsilon/2^n$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) = \epsilon \sum 2^{-n} = \epsilon$. Por lo tanto la unión $\bigcup I_n$, que es una vecindad de $\mathbb{Q}$, no puede ser todo $\mathbb{R}$.

Ejemplo. Sea $X = \mathbb{Q} \cap (0,1]$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 &= \{\text{uniones finitas de conjuntos } X \cap (a,b]\colon\ a,b \in \mathbb{Q}\} \\ &\quad \cup\ \{\varnothing,\ X\}. \end{aligned}$$

Entonces $\mathcal{F}_0$ es un álgebra de conjuntos de $X$. Definamos $l((a,b]) = b - a$. Entonces $l$ es una función conjuntista aditiva en $\mathcal{F}_0$. Sin embargo, $l$ *no es contablemente aditiva*.

Esto sería fácil de ver si $\mathcal{F}_0$ contuviera los conjuntos de un solo punto $\{q\}$, $q \in \mathbb{Q}$. Si fuera así, claramente $l(\{q\}) = 0$ porque

$$l(\{q\}) \leq l((q - \epsilon/2, q + \epsilon/2]) = \epsilon$$

para todo $\epsilon \in \mathbb{Q}$, $\epsilon > 0$. Pero $X = \bigcup_n \{q_n\}$ y tendríamos

$$1 = 1 - 0 = l(X) = \sum l(\{q_n\}) = \sum 0 = 0,$$

que contradice aditividad contable. Se puede llegar a la contradicción sin tener $\{q\} \in \mathcal{F}_0$, por medio de aproximaciones. Sea $I_n = (q_n - \epsilon/2^{n+1}, q_n + \epsilon/2^{n+1}]$, luego

$$l(X) = 1 > \epsilon = \sum l(I_n)$$

aunque $X \subseteq \bigcup I_n$. Si fuera contablemente aditiva, sería $l(X) \leq \sum l(I_n)$. (Si se desea se puede aclarar el argumento con $J_n \subseteq I_n$, $J_n$ disjuntos, $\bigcup I_n = \bigcup J_n$.)

Así $l$ es una funcion finitamente aditiva pero no contablemente aditiva.

*2.14.* Ejemplo. Un conjunto que no es Lebegue-medible:

Lema. Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue-medible, $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces el traslado $E + \alpha$ también es Lebesgue-medible, y $\lambda(E + \alpha) = \lambda(E)$.

Definamos la relacion de equivalencia $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$. Apliquemos el Axioma de la Elección para obtener un conjunto $E \subseteq [0, 1]$ tal que $E$ contiene exactamente un representante de cada clase de equivalence de $\sim$ en $[0, 1]$. Escribiremos $E_x = E + x \pmod 1 \ \subseteq [0, 1]$.

Supongamos que $E$ fuera Lebesgue-medible. Entonces cada $E_x$ es Lebesgue-medible. Sea $\alpha = \lambda(E) = \lambda(E_q)$. Notemos que $[0, 1] = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} E_q$ es una unión disjunta. Por lo tanto

$$1 = \lambda([0, 1]) = \lambda(\bigcup_{\mathbb{Q}} E_q)) = \sum_{\mathbb{Q}} \lambda(E_q) = \sum_{\mathbb{Q}} \alpha$$

lo cual es imposible (ni $\alpha = 0$ ni $\alpha > 0$). La conclusión es que $E$ no es medible.

(En aplicaciones prácticas no es común encontrarse con conjuntos en $\mathcal{L} \setminus \mathcal{B}$ porque se requiere el Axioma de la Elección para construirlos.)

ANÁLISIS REAL $\#3$

# FUNCIONES MEDIBLES Y SUS INTEGRALES

*3.1.* Recordemos que dada una $\sigma$-álgebra $\mathcal{F} \subseteq \mathbf{P}(X)$, decimos que el conjunto $E$ es *medible* (o $\mathcal{F}$-*medible*) cuando $E \in \mathcal{F}$.

Definición. Dada $\mathcal{F}$, una funcióñ $f\colon X \to \mathbb{R}^*$ se dice medible cuando
(i) para todo $r \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\,(r,\infty)\,)$ es un conjunto medible, y además
(ii) $f^{-1}(\{-\infty\})$ y $f^{-1}(\{\infty\})$ son conjuntos medibles.

Proposición. Supóngase que $f\colon X \to \mathbb{R}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.
(i) $(\forall r \in \mathbb{R})\ f^{-1}(\,(r,\infty)\,)$ es medible.
(ii) $(\forall r \in \mathbb{R})\ f^{-1}(\,[r,\infty)\,)$ es medible.
(iii) $(\forall r \in \mathbb{R})\ f^{-1}(\,(-\infty,r)\,)$ es medible.
(iv) $(\forall r \in \mathbb{R})\ f^{-1}(\,(-\infty,r]\,)$ es medible.

Demostración. Usar hechos tales como

$$[r,\infty) = \bigcap_1^\infty (r - \frac{1}{n}, \infty), \quad (r,\infty) = \bigcup_1^\infty [r + \frac{1}{n}, \infty),$$

$$f^{-1}\left(\bigcap C_\alpha\right) = \bigcap f^{-1}(C_\alpha), \quad f^{-1}\left(\bigcup C_\alpha\right) = \bigcup f^{-1}(C_\alpha). \quad \square$$

Nota. Es cierto que $f$ medible $\implies$ $(\forall r \in \mathbb{R}^*)\ f^{-1}(r)$ es medible, pero no recíprocamente. Una mejor condición es $f^{-1}$(boreliano) es medible.

*3.2.* Definición. La función característica (o función indicador) del subconjunto $E \subseteq X$ es $\chi_E\colon X \to \{0,1\}$,

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

Notar que $\chi_E$ es medible $\iff$ $E$ es medible.
A veces se escribe $\mathbf{1}_E$ para $\chi_E$.

Definición. $\varphi$ es una función simple si es una suma contable $\varphi = \sum_{j=1}^\infty c_j \chi_{E_j}$ donde los $E_j$ son conjuntos medibles disjuntos. Si la suma es finita, $\varphi$ se llamará simple-finita. (Se permite $c_j = \infty$.)

Lo anterior se define en el contexto de cualquier $X$. Un caso muy especial puede formularse cuando $X$ es un intervalo real.

Definición. $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}^*$ es una función escalonada (step function) si puede expresarse

$$f = \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{(x_{j-1},x_j]}$$

donde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ (los puntos $x_0, \ldots, x_n$ forman una partición de $(a,b]$).

(Hay funciones simples-finitas en $(a,b]$ que no son escalonadas.)

*3.3.* Proposición. Toda función simple es medible (cualquier $(X,\mathcal{F})$). En $(\mathbb{R},\mathcal{B})$, todas las funciones continuas y todas las funciones escalonadas son (Borel-)medibles.

Proposición. Sea $f$ una función medible en $(X,\mathcal{F})$. Sea $E \in \mathcal{F}$ un conjunto medible. Entonces la restricción $f|_E$ es una función medible en $(E,\mathcal{F}|_E)$ donde

$$\mathcal{F}|_E = \{E' \in \mathcal{F}\colon\ E' \subseteq E\}.$$

Proposición. Sean $f_n$ funciones medibles en $(X,\mathcal{F})$. Entonces $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\limsup f_n$, $\liminf f_n$ son todas funciones medibles.

Corolario. Sean $f_n$ medibles con $f_n \to f$ puntualmente. Entonces $f$ es medible.

Proposición. Sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ medible en $(X,\mathcal{F})$. Entonces $f$ es el límite uniforme de una sucesión de funciones simples.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Dado $x \in X$ hay un único $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m\epsilon < f(x) \le (m+1)\epsilon$, así definimos $f_\epsilon(x) = m\epsilon$. Verificar que $f_\epsilon$ es medible, y notar $|f(x) - f_\epsilon(x)| < \epsilon$ por lo que $f_{1/n} \to f$ uniformemente. □

Nota. En general $f$ podría no ser límite *uniforme* de funciones simples-finitas. Es fácil ver que $f$ siempre es límite (aunque no sea uniforme) de simples-finitas. Algunos libros usan funciones simples, otros simples-finitas para las definiciones principales. La diferencia es en qué momento en las demostraciones se tiene que trabajar más.

*3.4.* El siguiente resultado es muy útil.

Proposición. Sean $f$, $g$ medibles. Entonces $f+g$, $f-g$ también son medibles.

Demostración. Pongamos $h = f + g$.
Primero supongamos que $f$, $g$ son simples, digamos $f = \sum a_j \chi_{A_j}$, $g = \sum b_k \chi_{B_k}$.
Entonces $h$ toma solamente los valores $c_{jk} = a_j + b_k$ (que forman una colección contable), y el conjunto

$$C_{jk} = h^{-1}(c_{jk}) = \bigcup_{\substack{(j',k'):\\ a_{j'}+b_{k'}=c_{jk}}} (A_{j'} \cap B_{k'})$$

es medible para cada $j, k$. Por lo tanto $h = \sum_{jk} c_{jk}\chi_{C_{jk}}$ es una función simple y por tanto medible.
En general, tomamos $f_n \to f$, $g_n \to g$ límites uniformes de funciones simples. Entonces las $f_n + g_n$ son medibles, y $f_n + g_n \to f + g$. Por lo tanto $f + g$ es medible. Claramente lo mismo se hace para $f - h$. □

Proposición. Sea $f$ medible y sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces $cf$ es medible.

Proposición. Si $f$ es medible, entonces $f^2$ es medible.

Demostración.

$$(f^2)^{-1}((-\infty, r)) = \begin{cases} 0, & r < 0 \\ f^{-1}((-\infty, \sqrt{r})), & r \geq 0. \end{cases} \qquad \square$$

Proposición. Si $f$, $g$ son medibles, entonces $fg$ es medible.

Demostración.

$$fg = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right). \quad \square$$

Proposición. Sea $f\colon X \to \mathbb{R}^* - \{0\}$ medible. Entonces $1/f$ es medible.

Demostración. Sea $h = 1/f$. Entonces

$$h^{-1}((-\infty, r)) = \begin{cases} f^{-1}((1/r, \infty)) \cup f^{-1}((-\infty, 0)), & r > 0, \\ f^{-1}((1/r, 0)), & r < 0, \\ f^{-1}((-\infty, r)), & r = 0. \end{cases}$$

Todos los casos son conjuntos medibles. □

Corolario. Sean $f$, $g$ medibles y supóngase que $g$ no se anula. Entonces $f/g$ es medible.

*3.5.* Nota. Sea $P(x)$ una proposición para $x \in X$. No es necesario que el conjunto $\{x \in X\colon\ P(x)\}$ sea medible. Esto hace que la siguiente definición se formule de una manera técnica.

Definición. Una propiedad $P(x)$ para $x \in X$ se dice es válida en $\mu$-casi todo punto o para $\mu$-casi todo $x$ si

$$(\exists E \in \mathcal{F})\ \mu(E) = 0,\ (\forall x \in X \setminus E)\ P(x).$$

Ejemplo. Se usan las nociones $f = g$ $\mu$-c.t.p., $f \to g$ $\mu$-c.t.p.

Ejemplo. Sea $f_n(x) = (-x)^n$ para $x \in [0,1]$. Entonces $f_n \to 0$ c.t.p. con respecto a la medida de Lebesgue.

Cuando esté claro cuál es la medida bajo consideración, se escribirá c.t.p. en lugar de $\mu$-c.t.p.

Proposición. Sea $f$ medible, $f = g$ $\mu$-c.t.p. Si la medida $\mu$ es completa, entonces $g$ es medible.

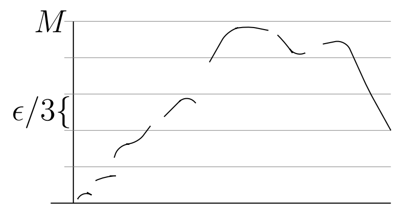
(Más generalmente, si $\mu$ es completa, y si $P(x)$ es válida c.t.p., entonces $\{x \in X\colon\ P(x)\}$ es medible.)

*3.6.* $\lambda$=medida de Lebesgue.
Proposición. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^*$ Lebesgue-medible tal que $\lambda(f^{-1}(-\infty) \cup f^{-1}(\infty)) = 0$. (“$f$ es finita c.t.p.”). Sea $\epsilon > 0$. Entonces
(i) Existe una función escalonada $g$ tal que $|f-g| < \epsilon$ afuera de algun conjunto de medida $< \epsilon$;
(ii) Existe una función continua $h$ tal que $|f-h| < \epsilon$ afuera de algun conjunto de medida $< \epsilon$.

Bosquejo de la demostración.

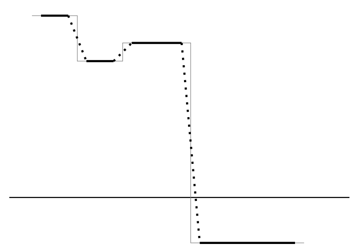
(1) Podemos tomar $M$ tal que $\lambda(\{x\colon\ |f(x)| \geq M\}) < \epsilon/3$ porque $\sum_n \lambda(\ f^{-1}(\ [n-1, n)\ )\ ) = b - a < \infty$.

(2) Podemos tomar una función simple-finita $\varphi = \sum_1^n \alpha_i \chi_{E_i}$ tal que $|f(x)| \leq M \implies |f(x) - \varphi(x)| < \epsilon/3$.




(3) Podemos tomar una función escalonada $g$ tal que
$\lambda(\{x\colon\ g(x) \neq \varphi(x)\}) < \epsilon/3$.
(Aproximar los $E_i$ con uniones $\bigcup I_j$ de intervalos.)

(4) Podemos tomar una función continua $h$ tal que
$\lambda(\{x\colon\ h(x) \neq g(x)\}) < \epsilon/3$.
(Conectar casi los extremos de los intervalos.)



LA INTEGRACIÓN CON RESPECTO A UNA MEDIDA

Observemos que toda $f\colon X \to \mathbb{R}^*$ puede partirse de manera única como $f = f^+ - f^-$ con $f^+, f^- \geq 0$, tomando

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0, \\ 0, & f(x) \leq 0. \end{cases}$$

Esto nos permitirá definir "$\int f$" primero para las funciones no-negativas, lo cual elimina muchas dificultades técnicas.

*3.7.* Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio con medida. Escribiremos

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(X, \mathcal{F}) = \{f\colon X \to \mathbb{R}^* :\ f \text{ es } \mathcal{F}\text{-medible}\},$$

$$\mathcal{M}^+ = \mathcal{M}^+(X, \mathcal{F}) = \{f \in \mathcal{M}\colon\ f \geq 0\}.$$

*3.8.* Sea $\varphi$ una función simple-finita. Entonces $\varphi^{-1}(a)$ es vacío salvo para $a$ en un conjunto finito $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Sea $E_j = \varphi^{-1}(a_j)$. Entonces $X = \bigcup_1^n E_n$, y

$$\varphi = \sum_1^n a_j \chi_{E_j} \tag{$*$}$$

se llamará la forma estándar para $\varphi$: es la única representación de la forma $\sum_1^m b_k \chi_{F_k}$ para la cual (i) los $b_k$ son distintos, (ii) los $F_k$ son disjuntos y (iii) $X = \bigcup F_k$.
(Notar que por ser $\varphi$ medible, $E_j \in \mathcal{F}$.)

Definición. Sea $\varphi$ una función simple-finita, $\varphi \in \mathcal{M}^+$. Entonces se define la integral de $\varphi$ como

$$\int \varphi\, d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j) \quad (\in \mathbb{R}^*)$$

donde $(*)$ es la forma estándar para $\varphi$.

Nota. Con la integral clásica, que es la integral de Riemann, se definen integrales "impropias" para funciones en todo $\mathbb{R}$, mediante

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\, dx = \lim_{M,N\to\infty} \int_{-M}^{N} f\, dx$$

entonces when $f = 0$, se tiene $\int_{-\infty}^{\infty} f\, dx = 0$. En nuestra definición de $\int \varphi\, d\mu$, si se tiene $\mu(E_j) = \infty$ para algún $j$, no queremos contar el conjunto $E_j$ si $a_j = 0$. Por esta razón se usa la aritmética $0 \cdot \infty = 0$. Hasta ahora sólo estamos considerando $\varphi \in \mathcal{M}^+$, es decir, $a_j \geq 0$, por lo que la situación $\infty + (-\infty)$ todavía no se presenta.

Definición. Cuando $E \in \mathcal{F}$, se define $\displaystyle\int_E \varphi\, d\mu = \int \varphi \cdot \chi_E\, d\mu$.
la integral sobre $E$.

Tendremos que enunciar y demostrar los lemas básicos para funciones simple-finitas, luego repetir para funciones $\geq 0$, y finalmente para funciones medibles en general.

*3.9.* Lema. Sean $\varphi, \psi$ funciones simple-finitas en $\mathcal{M}^+$. Sea $c \geq 0$. Entonces $c\varphi$, $\varphi + \psi$ son simple-finitas en $\mathcal{M}^+$ y

(a) $\int (c\varphi)\, d\mu = c \int \varphi\, d\mu$, $\quad \int (\varphi + \psi)\, d\mu = \int \varphi\, d\mu + \int \psi\, d\mu$;

(b) Para $E \in \mathcal{F}$ escribamos

$$\lambda(E) = \int_E \varphi \, d\mu.$$

Entonces $\lambda$ es una medida en $(X, \mathcal{F})$.

<u>Demostración.</u> (a) Si $c = 0$, entonces $c\varphi = 0$ y el enunciado es trivial. Si $c > 0$, entonces $c\varphi = \sum_1^n (ca_j)\chi_{E_j}$ está en forma estándar, luego

$$\int c\varphi \, d\mu = \sum (ca_j)\mu(E_j) = c \sum a_j \mu(E_j) = c \int \varphi \, d\mu.$$

Además, sea $\psi = \sum_1^m b_k \chi_{F_k}$ en forma estándar. Entonces

$$\varphi + \psi = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (a_j + b_k)\chi_{E_j \cap F_k}$$

donde los $E_j \cap F_k$ son disjuntos. Agrupamos los pares $(j, k)$ donde $a_j + b_k$ tienen un valor común $c = c_i$, es decir, consideramos

$$G_i = \bigcup_{a_j + b_k = c_i} E_j \cap F_k,$$

$$\mu(G_i) = \sum_{a_j + b_k = c_i} \mu(E_j \cap F_k),$$

para obtener una representación de $\varphi + \psi = \sum_{i=1}^{p} c_i \chi_{G_i}$ en forma estándar, y su integral es

$$\begin{aligned}
\int (\varphi + \psi) \, d\mu &= \sum_{i=1}^{p} c_i \mu(G_i) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (a_j + b_k)\mu(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_j \mu(E_j \cap F_k) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k=1}^{m} \mu(E_j \cap F_k) + \sum_{k=1}^{m} b_k \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) + \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(F_k) \\
&= \int \varphi \, d\mu + \int \psi \, d\mu.
\end{aligned}$$

(b) Notemos que $\varphi\chi_E = \sum_{j=1}^n a_j\chi_{E_j\cap E}$ donde los $E_j\cap E$ son disjuntos. Por lo tanto $\varphi\chi_E$ es función simple-finita, luego

$$\begin{aligned}\lambda(E) &= \int \varphi\chi_E\, d\mu \overset{(a)}{=} \sum a_j \int \chi_{E_j\cap E}\, d\mu = \sum_1^n a_j\mu(E_j\cap E)\\ &= \sum a_j\mu_{E_j}(E)\end{aligned}$$

donde $\mu_{E_j}(E) = \mu(E_j\cap E)$. Se verifica que $\mu_{E_j}$ es una medida en $(X,\mathcal{F})$, y entonces $\lambda$ es una combinación lineal no-negativa finita de medidas, y por tanto es también una medida. $\square$

*3.10.* Para definir $\displaystyle\int f\, d\mu$ para cualquier $f\in\mathcal{M}^+$ usaremos esencialmente $\lim\int\varphi_n\, d\mu$ donde $\varphi_n\uparrow f$ y donde $\varphi_n\in\mathcal{M}^+$ son simples-finitas. La dificultad es mostrar que el límite no depende de la sucesión que se utilice para aproximar a $f$. Por ello trabajaremos de una forma un poco diferente:

<u>Definición.</u> Sea $f\in\mathcal{M}^+$. Se define

$$\int f\, d\mu = \sup\left\{\int\varphi\, d\mu\colon\ \varphi\in\mathcal{M}^+,\ \varphi \text{ es simple-finita, } 0\le\varphi\le f\right\}.$$

(Recordar que este valor puede ser $\infty$.) Se define también

$$\int_E f\, d\mu = \int f\chi_E\, d\mu$$

para $E\in\mathcal{F}$ (notar que $f\chi_E\in\mathcal{M}^+$ para $f\in\mathcal{M}^+$).

<u>Lema.</u> (monotonicidad de la integral.)

(a) Sean $f,g\in\mathcal{M}^+$, $f\le g$. Entonces $\displaystyle\int f\, d\mu\le\int g\, d\mu$.

(b) Sean $f\in\mathcal{M}^+$; $E,F\in\mathcal{F}$; $E\subseteq F$. Entonces $\displaystyle\int_E f\, d\mu\le\int_F f\, d\mu$.

<u>Demostración.</u> (a) Dado que $0\le\varphi\le f \implies 0\le\varphi\le g$, la definición de $\int g\, d\mu$ es un sup sobre un conjunto más grande que para $\int f\, d\mu$.
(b) $f\chi_E\le f\chi_F$, luego aplicar (a). $\square$

*3.11.* Recordemos que $(X,\mathcal{F},\mu)$ es un espacio arbitrario. El siguiente hecho es probablemente el resultado más importante en la teoría de la integración.

Teorema. (de Lebesgue de la Convergencia Monótona)
Sean $f_n \in \mathcal{M}^+$, $f_n \uparrow f$. Entonces $f \in \mathcal{M}^+$ y
$$\int f\, d\mu = \lim_n \int f_n\, d\mu$$

(tener presente que ambos lados pueden ser $\infty$.)

Demostración. Ya sabemos que $f = \lim f_n$ es medible, claramente $f \in \mathcal{M}^+$. Esto nos permite hablar de $\displaystyle\int f\, d\mu$. Por hipótesis $f_n \leq f_{n+1} \leq f$, luego por el Lema
$$\int f_n\, d\mu \leq \int f_{n+1}\, d\mu \leq \int f\, d\mu.$$

Por esto la sucesión $\left\{\displaystyle\int f_n\, d\mu\right\}_n$ converge a algo en $\mathbb{R}^*$ y el límite satisface $\displaystyle\lim \int f_n\, d\mu \leq \int f\, d\mu$.

Para la desigualdad inversa quisiéramos "$f_n \geq f$" lo cual no es cierto. Trabajaremos con algo como "$f_n \geq (1-\epsilon)f$".

Supongamos que $0 \leq \varphi \leq f$. Sea $0 < \alpha = 1-\epsilon < 1$, y definamos el conjunto $A_n$ (que depende de $\varphi$ y $\epsilon$),
$$A_n = \{x \in X\colon\ f_n(x) \geq \alpha\, \varphi(x)\}.$$

Dado que $f_n \leq f_{n+1}$ tenemos $A_n \subseteq A_{n+1}$. Dado que $f_n(x) \to f(x)$ tenemos $f_n(x) \geq \alpha\, \varphi(x)$ cuando $n$ es lo suficientemente grande, por lo que $X = \bigcup A_n$.

Supongamos que $\varphi$ es medible, luego $f_n - \alpha\varphi$ es medible, por lo que $A_n \in \mathcal{F}$. Supongamos que $\varphi$ es simple-finita, $\varphi \in \mathcal{M}^+$. Entonces $(\alpha\varphi)\cdot \chi_{A_n} \leq f_n \chi_{A_n}$, de lo cual deducimos
$$\alpha \int_{A_n} \varphi\, d\mu = \int_{A_n} (\alpha\varphi)\, d\mu \leq \int_{A_n} f_n\, d\mu \leq \int f_n\, d\mu \text{ para todo } n. \quad (*)$$

Recordemos ahora el lema que la función conjuntista $E \overset{\lambda}{\mapsto} \displaystyle\int \varphi\chi_E\, d\mu = \int_E \varphi\, d\mu$ es una medida porque $\varphi$ es simple-finita. Apliquemos esta medida a $\bigcup A_n$ (recordar $A_n \uparrow X$):
$$\int \varphi\, d\mu = \int_X \varphi\, d\mu = \int_{\bigcup A_n} \varphi\, d\mu = \lim \int_{A_n} \varphi\, d\mu.$$

por lo que

$$\alpha \int \varphi \, d\mu = \alpha \lim_n \int_{A_n} \varphi \, d\mu \overset{(*)}{\leq} \lim_n \int f_n \, d\mu$$

válido para $0 < \alpha < 1$. Por lo tanto,

$$\int \varphi \, d\mu \leq \lim_n \int f_n \, d\mu. \qquad (**)$$

Pero $\displaystyle\int f \, d\mu = \sup \left\{ \int \varphi \, d\mu \right\}$, así de $(**)$ sacamos que $\displaystyle\int f \, d\mu \leq \lim \int f_n \, d\mu$. La igualdad queda demostrada. $\square$

*3.12.* Proposición. Sea $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{F})$. Entonces existen funciones simples-finitas $\varphi_n \geq 0$ tales que $\varphi_n \uparrow f$.

Demostración. Sabemos ver $f$ como límite de simples finitas $\psi_n \leq f$, tomamos $\varphi_n = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \max(\psi_k, 0)$. $\square$

Corolario. (del T. de la Convergencia Monótona). Sean $f, g \in \mathcal{M}^+$, $c \geq 0$. Entonces las functiones $cf, f + g \in \mathcal{M}^+$ satisfacen

$$\int (cf) \, d\mu = c \int f \, d\mu, \qquad \int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.$$

Demostración. Si $c = 0$ es trivial; sea $c > 0$. Tomemos $\varphi_n \in \mathcal{M}^+$ simples-finitas, $\varphi_n \uparrow f$. Entonces $c\varphi_n \uparrow cf$, por lo que

$$\int cf \, d\mu \overset{\text{Conv.Mon}}{=} \lim_n \int (c\varphi_n) \, d\mu = c \, \lim_n \int \varphi_n \, d\mu \overset{\text{Conv.Mon}}{=} c \int f \, d\mu.$$

Tomemos $\varphi_n \uparrow f$, $\psi_n \uparrow g$ (simples-finitas), luego $(\varphi_n + \psi_n) \uparrow (f + g)$. Así

$$\begin{aligned} \int (f + g) \, d\mu &\overset{\text{Conv.Mon}}{=} \lim_n \int (\varphi_n + \psi_n) \, d\mu = \lim_n \int \varphi_n \, d\mu + \lim_n \int \psi_n \, d\mu \\ &\overset{\text{Conv.Mon}}{=} \int f \, d\mu + \int g \, d\mu. \quad \square \end{aligned}$$

*3.13.* Ejemplo. Sea $f_n(x) = \dfrac{1}{nx}$, $x \geq 0$, $n = 1, 2, \cdots$. No cumple con las hipótesis de Convergencia Monótona porque $f_n \downarrow 0$.

Lema. (de Fatou) Sean $f_n \in \mathcal{M}^+$, $n = 1, 2, \ldots$. Entonces

$$\int (\liminf_n f_n)\, d\mu \quad \leq \quad \liminf_n \left( \int f_n \, d\mu \right).$$

Demostración. Recordemos $\liminf_n f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \inf_{j\geq n} f_j(x)$,
y observemos

$$\inf_{j\geq n} f_j \leq \inf_{j\geq n+1} f_j$$

forma una sucesión creciente con $n$. Ademas, $\inf_{j\geq n} f_j \in \mathcal{M}^+$. Por esto

$$\lim_n \int (\inf_{j\geq n} f_j)\, d\mu \overset{\text{Conv.Mon}}{=} \int \liminf_n f_n \, d\mu.$$

Para cada $n$ fijo tenemos $f_n \geq \inf_{j\geq n} f_j$ por lo que
$\int f_n \, d\mu \geq \int \inf_{j\geq n} f_j \, d\mu$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \liminf_n \int f_n \, d\mu \quad & \geq \quad \liminf_n \int \inf_{j\geq n} f_j \, d\mu \\ & = \quad \lim_n \int \inf_{j\geq n} f_j \, d\mu \\ & \overset{\text{Conv.Mon}}{=} \quad \int \liminf_n f_n \, d\mu. \quad \square \end{aligned}$$

*3.14.* Definición. La integral indefinida de la función $f$ (con respecto a $\mu$) es la función conjuntista

$$\lambda(E) = \int_E f \, d\mu, \quad E \in \mathcal{F}.$$

Corolario. (de Conv. Monot.) Sea $f \in \mathcal{M}^+$. Entonces la integral indefinida de $f$ es una medida en $(X, \mathcal{F})$.

Demostración. (Ya lo sabemos para funciones simples-finitas.) Claramente $\lambda(\varnothing) = 0$, $\lambda(E) \geq 0$. Sean $E_n \in \mathcal{F}$ disjuntos. Entonces

$$\begin{aligned} \lambda\left( \bigcup_1^\infty E_n \right) \quad & = \quad \int_{\bigcup E_n} f \, d\mu \quad = \quad \int f \chi_{\bigcup E_n} \, d\mu \\ & = \quad \int \lim_N f \, \chi_{\bigcup_1^N E_n} \, d\mu \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\text{Conv.Mon}}{=} && \lim_N \int f\,\chi_{\bigcup_1^N E_n}\,d\mu &&= \lim_N \int \left(\sum_1^N f\,\chi_{E_n}\right) d\mu \\
&\overset{\text{Lema(b)}}{=} && \lim_N \sum_1^N \int f\,\chi_{E_n}\,d\mu &&= \lim_N \sum_1^N \int_{E_n} f\,d\mu \\
&= && \lim_N \sum_1^N \lambda(E_n) &&= \sum_1^\infty \lambda(E_n). \quad \square
\end{aligned}
$$

Corolario. Sea $f \in \mathcal{M}^+$. Entonces $f(x) = 0$ c.t.p. $\iff \displaystyle\int f\,d\mu = 0$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $f(x) = 0$ c.t.p. Entonces el conjunto $E = \{x \in X\colon\ f(x) > 0\}$ es medible y $\mu(E) = 0$. Dado que $f \leq \infty\chi_E$, se tiene $\int f\,d\mu \leq \int \infty\chi_E\,d\mu = \infty \cdot \mu(E) = 0$. De esto $\int f\,d\mu = 0$.
($\Leftarrow$) Sea $\displaystyle\int f\,d\mu = 0$. Definamos $E_n = \{x \in X\colon\ f(x) > \dfrac{1}{n}\}$,
lo cual da $\frac{1}{n}\chi_{E_n} \leq f$. Por lo tanto

$$0 \leq \frac{1}{n}\mu(E_n) = \int \frac{1}{n}\chi_{E_n}\,d\mu \leq \int f\,d\mu = 0.$$

En consecuencia $\mu(E_n) = 0$, y luego

$$0 = \mu\left(\bigcup E_n\right) = \mu(\{x\colon\ f(x) > 0\}). \quad \square$$

*3.15.* Definición. $\lambda \ll \mu$ ($\lambda$ es absolutamente continua con respecto a $\mu$) si para todo $E \in \mathcal{F}$,

$$\mu(E) = 0 \implies \lambda(E) = 0.$$

Proposición. Sea $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{F})$ y sea $\lambda$ la integral indefinida de $f$ con respecto a $\mu$. Entonces $\lambda \ll \mu$.

Demostración. $\mu(E) = 0 \implies f\chi_E = 0$ $\mu$-c.t.p.
$\implies \lambda(E) = \int f\chi_E\,d\mu = 0.$ $\square$

(Hay un importante recíproco a este teorema, que dice que las medidas absolutamente continuas son integrales indefinidas: el Teorema de Radon-Nikodým.)

*3.16.* Una versión más poderosa del Teorema de Convergencia Monótona (por tener "c.t.p."), y que normalmente se conoce por ese mismo nombre:

<u>Teorema.</u> Sean $f_n, f \in \mathcal{M}^+$, $f_n \uparrow f$ $\mu$-c.t.p. Entonces

$$\int f\, d\mu = \lim \int f_n\, d\mu.$$

<u>Nota.</u> (La hipótesis $f \in \mathcal{M}^+$ no es necesaria cuando el espacio con medida es completo.)

<u>Demostración.</u> Tenemos $f_n(x) \uparrow f(x)$ para $x \in A = X \setminus B$, con $\mu(B) = 0$. Así $f_n \chi_A \uparrow f \chi_A$, luego

$$\int f_n \chi_A\, d\mu \overset{\text{Conv.Mon.}}{\to} \int f \chi_A\, d\mu. \tag{$*$}$$

Además se tiene

$$\int f_n \chi_B\, d\mu = 0 \to 0 = \int f \chi_B\, d\mu \tag{$**$}$$

porque $g\chi_B = 0$ c.t.p. para cualquier $g$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int f_n\, d\mu &= \int f_n(\chi_A + \chi_B)\, d\mu = \int f_n \chi_A\, d\mu + \int f_n \chi_B\, d\mu \\
&\overset{(*)(**)}{\to} \int f \chi_A\, d\mu + \int f \chi_B\, d\mu \\
&= \int f(\chi_A + \chi_B)\, d\mu = \int f\, d\mu. \quad \square
\end{aligned}$$

<u>Corolario.</u> ("convergencia absoluta de series de integrales")
Sean $g_n \in \mathcal{M}^+$, $n = 1, 2, \cdots$. Entonces

$$\int \left( \sum_1^\infty g_n \right) d\mu = \sum_1^\infty \left( \int g_n\, d\mu \right).$$

(recordar que ambos lados pueden ser $\infty$.)

<u>Demostración.</u> Tenemos $\sum_1^N g_n \in \mathcal{M}^+$ y $\sum_1^N g_n \uparrow \sum_1^\infty g_n$, así se aplica el Teorema de Convergencia de Monótona. $\square$

ANÁLISIS REAL $\#4$

# FUNCIONES INTEGRABLES

Hasta ahora sólo hemos integrado funciones no-negativas. Habrá un espacio con medida llamado $(X, \mathcal{F}, \mu)$ en todo lo que sigue. La idea esencial será de evitar tener que calcular $\infty + (-\infty)$. Se recomienda siempre fijarse en cuáles de las integrales son no-negativas a fuerzas.

*4.1.* Empezamos con funciones que no toman el valor $\infty$.

Definición. Sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función medible. Se dice que $f$ es integrable cuando $\displaystyle\int f^+ \, d\mu < \infty$ y $\displaystyle\int f^- \, d\mu < \infty$. Escribiremos

$$L(X, \mathcal{F}, \mu) = L = \{\text{funciones integrables}\}.$$

Dada $f \in L(X, \mathcal{F}, \mu)$ se define su integral,

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu$$

y la integral sobre un subconjunto $E$ es $\displaystyle\int_E f \, d\mu = \int f \chi_E \, d\mu$.

Si $f \in \mathcal{M}^+ \cap L$, entonces $\displaystyle\int f \, d\mu$ ya fue definida anteriormente y es igual a la definición actual porque $f^+ = f, \;\; f^- = 0$.

Nota. Las funciones en $\mathcal{M}^+$ todas *tienen integrales*, pero no todas *son integrables.*

Nota. Es posible trabajar con funciones con $\int f^+ d\mu < \infty$ y $\int f^- d\mu \leq \infty$, o bien con $\int f^+ \, d\mu \leq \infty$ y $\int f^- \, d\mu < \infty$, pero no mezclar los dos casos.

*4.2.* Lema. Sea $f = f_1 - f_2$ con $f_1, f_2 \in \mathcal{M}^+$ y $\int f_1 \, d\mu < \infty$, $\int f_2 \, d\mu < \infty$ (o sea $f_i \in \mathcal{M}^+ \cap L$). Entonces $\int f \, d\mu = \int f_1 \, d\mu - \int f_2 \, d\mu$.

Esto no se sigue directamente de la definición, hay que argumentar como sigue: $f^+ + f_2 = f_1 + f^-$, lo cual da $\int f^+ \, d\mu + \int f_2 \, d\mu = \int f_1 \, d\mu + \int f^- \, d\mu$ por la linealidad de la integral sobre funciones no-negativas, que ya probamos. Como las cuatro integrales son finitas, se puede restar para obtener la afirmación.

Observemos que $|f| = f^+ + f^-$. Usamos el Lema en lo siguiente.

Teorema. Sea $f$ medible. Entonces $f \in L \iff |f| \in L$. Cuando $f \in L$, se tiene

$$\left|\int f\,d\mu\right| \le \int |f|\,d\mu.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} f \in L &\iff \int f^+\,d\mu < \infty, \quad \int f^-\,d\mu < \infty \\ &\iff \int |f|\,d\mu < \infty \iff |f| \in L. \end{aligned}$$

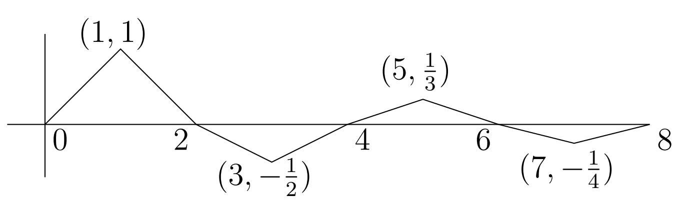
Además, sea $f \in L$. Entonces

$$\begin{aligned} \left|\int f\,d\mu\right| &= \left|\int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu\right| \le \left|\int f^+\,d\mu\right| + \left|\int f^-\,d\mu\right| \\ &= \int f^+\,d\mu + \int f^-\,d\mu = \int (f^+ + f^-)\,d\mu \\ &= \int |f|\,d\mu. \quad \square \end{aligned}$$

Teorema. Sea $f$ medible y $g$ integrable con $|f| \le |g|$. Entonces $f$ es integrable y $\int |f|\,d\mu \le \int |g|\,d\mu$.

Demostración. Por $|f|, |g| \in \mathcal{M}^+$ tenemos $\int |f|\,d\mu \le \int |g|\,d\mu < \infty$, de lo cual $|f| \in L$. Por el teorema anterior, $f \in L$. $\square$

*4.3.* Ejemplo. El resultado anterior no se aplica a funciones integrables en el sentido de Riemann. Por ejemplo, $(\operatorname{sen} x)/x$ es Riemann-integrable en $1 \le x < \infty$ pero $|(\operatorname{sen} x)/x|$ no lo es. El ejemplo siguiente es un poco más fácil de calcular, una función $f$ lineal por pedazos,




Es Riemann-integrable porque $\dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{2n+1} = \dfrac{1}{2n(n+1)}$ y porque $\sum \dfrac{1}{2n(n+1)} < \infty$. Pero el valor absoluto de la función no es

Riemann-integrable porque $\sum \frac{1}{n} = \infty$. (Tampoco son integrables $f^+$ y $f^-$ luego $f$ no es Lebesgue-integrable.)

*4.4.* Teorema. $L$ es un espacio vectorial, y la función $\int : L \to \mathbb{R}$ es lineal.

Demostración. Sean $f, g \in L$. Entonces $|f|, |g| \in L$. Si $c = 0$, claramente $\int (cf)\, d\mu = c \int f\, d\mu = 0$. Si $c > 0$, entonces $(cf)^+ = c(f^+)$, $(cf)^- = c(f^-)$, mientras si $c < 0$, entonces $(cf)^+ = -c(f^-)$, $(cf)^- = -c(f^+)$. De cualquier forma obtenemos que $\int (cf)^+\, d\mu$ y $\int (cf)^-\, d\mu$ son finitas (luego $cf \in L$) y

$$\int (cf)\, d\mu = \int (cf)^+\, d\mu - \int (cf)^-\, d\mu = c \int f\, d\mu.$$

Tenemos

$$\int (|f| + |g|)\, d\mu = \int |f|\, d\mu + \int |g|\, d\mu < \infty$$

porque $|f|, |g| \in \mathcal{M}^+$. Así $|f| + |g| \in L$. Dado que $|f + g| \leq |f| + |g|$, se tiene $|f + g| \in L$, luego $f + g \in L$. Queda verificado que $L$ es espacio vectorial.
Notemos que $f + g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$ que es la diferencia de dos funciones en $\mathcal{M}^+$. Por el Lema,

$$\begin{aligned} \int (f + g)\, d\mu &= \int (f^+ + g^+)\, d\mu - \int (f^- + g^-)\, d\mu \\ &= \int f\, d\mu + \int g\, d\mu \end{aligned}$$

con la última igualdad por la linealidad de $\int$ para funciones en $\mathcal{M}^+$.
$\square$

Nota. $\mathcal{M}^+$ no es un espacio vectorial porque no admite restar.

*4.5.* Teorema. (de Lebesgue de Convergencia Dominada). Sean $f_n$ medibles, $f_n \to f$ c.t.p. Supóngase que existe $g \in L$ tal que $|f_n| \leq g$ c.t.p. para todo $n$. Entonces $f \in L$ y

$$\int f_n\, d\mu \to \int f\, d\mu$$

cuando $n \to \infty$.

Demostración. Hay un conjunto nulo (medible) que contiene todos los $x$ para los cuales $f_n(x) \not\to f(x)$. Podemos redefinir $f_n(x) = 0$,

$f(x) = 0$ para $x$ en este conjunto; las nuevas funciones son medibles, tienen las mismas integrales y $f_n \to f$ en todo punto. De la misma forma podemos suponer $|f| \leq g$ en todo punto. Tenemos $f \in L$. (De esto se sigue que la $f$ original también está en $L$, una de las conclusiones del enunciado.)
Tenemos $g + f_n \geq 0$ para todo $n$, luego

$$\begin{aligned}
\int g\,d\mu + \int f\,d\mu &= \int (g+f)\,d\mu \overset{\text{Fat.}}{\leq} \liminf_n \int (g+f_n)\,d\mu \\
&= \liminf_n \left( \int g\,d\mu + \int f_n\,d\mu \right) \\
&= \int g\,d\mu + \liminf_n \int f_n\,d\mu
\end{aligned}$$

(recordar que el Lema de Fatou se aplica a funciones en $\mathcal{M}^+$). (Esto depende de manera esencial del hecho que $\int g$ no depende de $n$, pues en general $\liminf(a_n + b_n) \not\leq \liminf a_n + \liminf b_n$.)
Por ser integrable $g$, se puede restar su integral y obtener

$$\int f\,d\mu \leq \liminf_n \int f_n\,d\mu$$

(una desigualdad que se parece a la de Fatou pero las funciones no están en $\mathcal{M}^+$). Apliquemos este hecho a $\{-f_n\} \subseteq L$ con $-f_n \to -f$, dando
$\displaystyle\int -f\,d\mu \leq \liminf \int -f_n\,d\mu$, lo cual dice $\displaystyle\int f\,d\mu \geq \limsup \int f_n\,d\mu$.
Combinando los resultados, $\displaystyle\int f\,d\mu = \lim \int f_n\,d\mu$. $\square$

*4.6.* Para funciones $f \in \mathcal{M}$, $f\colon X \to \mathbb{R}^*$ que posiblemente tomen los valores $\pm\infty$, se pueden aplicar las definiciones de "integrable" e "integral" a $f\chi_E$ en lugar de $f$, siempre y cuando la medida del conjunto

$$E = \{x \in X\colon\ f(x) = \pm\infty\}$$

sea igual a cero.

De la misma manera, para sucesiones $\{f_n\} \subset \mathcal{M}$ de funciones que son integrables en este sentido, la unión $\bigcup f_n^{-1}(\{\pm\infty\})$ también es de medida cero, lo cual permite la aplicación de los resultados correspondientes.

CONSECUENCIAS DE CONVERGENCIA DOMINADA

*4.7.* Dada una función $f(x,t)$ de dos variables, la integración con respecto a una de ellas produce una función de la otra. Investiguemos el efecto de cambio de las operaciones de integral y de límite. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio con medida.

Dada $f\colon X \times (a,b) \to \mathbb{R}$, escribiremos

$$f(x,t) = f_t(x) = f^{[x]}(t),$$
$$\int f_t \, d\mu = \int f(x,t) \, d\mu(x).$$

<u>Lema.</u> Supóngase que (i) $(\forall t \in (a,b))$ $f_t \in \mathcal{M}$, que (ii) para algún $t_0 \in (a,b)$ se tiene $(\forall x \in X)$ $f(x,t_0) = \lim_{t\to t_0} f(x,t)$ y que (iii) para algún $g \in L$ se tiene $(\forall x)(\forall t)$ $|f(x,t)| \le g(x)$. Entonces

$$\int f(x,t_0) \, d\mu(x) = \lim_{t\to t_0} \int f(x,t) \, d\mu(x).$$

<u>Demostración.</u> Las hipótesis $f_t \in \mathcal{M}$ y $|f(x,t)| \le g(x)$ implican que $f_t \in L$, lo cual permite escribir "$\int f(x,t)\, d\mu(x)$" para cualquier $t$. Si $t_n \to t_0$, las funciones $f_{t_n}$ satisfacen las hipótesis de Convergencia Dominada ($f_{t_n} \to f_{t_0}$, $|f_{t_n}| \le g$), luego

$$\int f_{t_n} \, d\mu \to \int f_{t_0} \, d\mu$$

que es lo que se tenía que demostrar. $\square$

<u>Teorema.</u> Supóngase que (i) $(\forall t)$ $f_t \in \mathcal{M}$, que (ii) $(\forall x \in X)$ $f^{[x]}(t) = f(x,t)$ es continua y que (iii) para algún $g \in L$, $(\forall x,t)$ $|f(x,t)| \le g(x)$. Defínase $F\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ por

$$F(t) = \int f(x,t) \, d\mu(x).$$

Entonces $F$ es una función continua en $(a,b)$.

<u>Demostración.</u> Por el Lema, $(\forall t_0)$ $F(t_0) = \lim_{t\to t_0} F(t)$. $\square$

*4.8.* <u>Ejemplo.</u> Sea $f\colon [0,1]\times(0,1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,t) = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)+t$. Entonces $f_t \in \mathcal{M}$ mientras $f^{[x]}$ es continua, y $|f(x,t)| \le 2 \in L$.
La integral es $F(t) = t$, que es continua.

*4.9.* <u>Teorema.</u> Supóngase que (i) $(\forall t)$ $f_t \in \mathcal{M}$, que (ii) para algún $t_0$ se tiene $f_{t_0} \in L$, que (iii) $(\forall x,t)$ $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ existe y que (iv) hay una $g \in L$ tal que $(\forall x, t) \left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x)$. Entonces la integral $F(t) = \displaystyle\int f(x,t)\, d\mu(x)$ existe para todo $t \in (a,b)$, la función $F$ es diferenciable en $(a,b)$ y

$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\int f(x,t)\, d\mu(t) = \int \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\, d\mu(t).$$

<u>Demostración.</u> Veamos que $f_t \in L$ para todo $t$. Sea $t_n \to t$ con $t_n \neq t$. Para $x \in X$, por (iii) y definición de derivada tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \lim_n \frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t}$$

que es límite de funciones medibles en $x$, luego $(\partial f/\partial t)(\cdot, t)$ también es medible. Ahora fijemos $x \in X$. Por el Teorema del Valor Medio, para cualquier $t \in (a,b)$, existe un $s$ entre $t$ y $t_0$ tal que

$$f(x,t) - f(x,t_0) = (t - t_0)\frac{\partial f}{\partial t}(x,s).$$

Esto da la cota $|f(x,t)| \leq |f_{t_0}(x)| + |t - t_0| g(x)$, luego $f_t \in L$ para todo $t \in [a,b]$.

Fijemos $t \in (a,b)$. Cuando $t_n \neq t$, tenemos

$$\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \int \frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t}\, d\mu(x) = \int \frac{f_{t_n}(x) - f_t(x)}{t_n - t}\, d\mu(x).$$

Como antes, hay $s_n$ entre $t_n$ y $t$ tal que

$$\left|\frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, s_n)\right| \leq g(x).$$

Suponiendo $t_n \to t$, tenemos $s_n \to t$, y por el Teorema de Convergencia Dominada

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dt}(t) \quad &= \quad \lim_n \frac{F(s_n) - F(t)}{s_n - t} \\
&\overset{\text{C.Dom.}}{=} \quad \int \left(\lim \frac{f(x,s_n) - f(x,t)}{s_n - t}\right) d\mu(x) \\
&= \quad \int \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\, d\mu(x). \quad \square
\end{aligned}$$

*4.10.* Ejemplo. Para $t > 0$, tenemos $\displaystyle\int_{[0,\infty)} e^{-tx}\, dx = \frac{1}{t}$. (Esto es conocido para la integral de Riemann, se puede mostrar que es igual a la integral de Lebesgue $\displaystyle\int_{[0,\infty)} e^{-tx}\, d\mu(x)$.) Para $t \in [a, \infty]$ se tiene

$$e^{-tx} \leq e^{-ax} = g(x)$$

con $g \in L$. Por el Teorema (aplicado a intervalos finitos, y luego faltan unos argumentos adicionales), se llega a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right) \overset{\text{Teo}}{=} \int_{[0,\infty)} \frac{\partial}{\partial t}(e^{-tx})\, d\mu(x) = \int_0^\infty -xe^{-tx}\, dx = -\frac{1}{t^2}.$$

Repitiendo el proceso se obtiene

$$\int_0^\infty x^n e^{-tx}\, dx = n!\, t^{-(n+1)},$$

y al poner $t = 1$ obtenemos

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx = n!.$$

ANÁLISIS REAL #5

# ESPACIOS $L^p$

El conjunto de funciones $X \to \mathbb{R}$ es un espacio vectorial porque $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial. En la práctica a menudo definimos una función como límite de funciones de un tipo particular, y queremos probar propiedades de la función límite por medio de propiedades de las funciones aproximantes. Ejemplo: "Un límite uniforme de funciones continuas es continua." Por esto necesitamos poner topologías en los espacios de funciones.

*5.1.* Sea $V$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Definición. Una función $N : V \to \mathbb{R}$ es una norma en $V$ si para cualesquier $v, w \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$,

(i) $N(v) \geq 0$; (ii) $N(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$;
(iii) $N(\alpha v) = |\alpha| N(v)$; (iv) $N(v + w) \leq N(v) + N(w)$.

Si $N$ satisface (i), (iii), (iv), entonces es una seminorma en $V$.

Recordemos que dado un conjunto $Y$,
Definición. Una función $d : Y \times Y \to \mathbb{R}$ es una métrica en $Y$ si para cualesquier $x, y, z$ en $Y$,

(i) $d(x, y) \geq 0$; (ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = x$;
(iii) $d(x, y) = d(y, x)$; (iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Si $d$ satisface (i), (iii), (iv) y (ii′) $d(x, x) = 0$, entonces es se llama una seudométrica en $Y$.

Es fácil verificar
Proposición. Si $N$ es una (semi-)norma en $V$, entonces la función $d$ definida por

$$d(v, w) = N(v - w)$$

es una (seudo-)métrica en $V$.

Hay una jerarquía de estructuras, norma $\to$ métrica $\to$ topología.

*5.2.* Ejemplos de espacios con norma.

(a) $V = \mathbb{R}$, $N(x) = |x|$.

(b) Dados espacios vectoriales $V_1, \ldots, V_n$ con normas $N_1, \ldots, N_n$, entonces $V_1 \times \cdots \times V_n$ es un espacio vectorial con cualquiera de las normas

$$N(v_1, \ldots, v_n) = (N_1(v_1)^p + \cdots + N_n(v_n)^p)^{1/p} \qquad (p \geq 1 \text{ fijo})$$

ó

$$N(v_1, \ldots, v_n) = \max(N_1(v_1), \ldots, N_n(v_n)).$$

(c) $l_p = \{\text{sucesiones } \{u_n\} \subseteq \mathbb{R} : \sum |u_n|^p < \infty\}$ con

$$N(\{u_n\}) = \left(\sum |u_n|^p\right)^{1/p}.$$

$l_\infty = \{\text{sucesiones } \{u_n\} \subseteq \mathbb{R} : \ \sup |u_n| < \infty\}$ con

$$N(\{u_n\}) = \sup |u_n|.$$

(d) $B(X) = \{f \colon X \to \mathbb{R}, f \text{ acotada}\}$, con $N(f) = \sup_{x\in X} |f(x)|$.
($X$ cualquier conjunto)

*5.3.* Ejemplos de semi-normas
(a) $V = \mathbb{R}^n$, $N_0(u_1, \ldots, u_n) = \max\{|u_2|, |u_3|, \ldots, |u_n|)$.
Nótese $N_0(u_1, 0, \ldots, 0) = 0$.
(b) $V = C[0, 1]$, $N_0(f) = \sup_{0\leq x\leq 1/2} |f(x)|$;
Nótese $N_0(f) = 0$ donde $f(x) = \max(0, x - 1/2)$.
(c) $V = C^1[0, 1]$, $N_0(f) - \sup\{|f'(x)|\}$.
Nótese $N_0(\text{constante}) = 0$.

*5.4.* Definición. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio con medida. Se escribe
$N_\mu(f) = \displaystyle\int |f| d\mu$ para $f \in L$ (= {funciones integrables}).

Por resultados ya conocidos tenemos
Proposición. $N_\mu$ es una seminorma en $L$; $N_\mu(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ c.t.p..

*5.5.* Una seminorma "no detecta" elementos de seminorma cero. La siguiente construcción simplemente hace caso omiso de tales elementos.

Proposición. Sea $N_0$ una seminorma en el espacio vectorial $V_0$. Digamos que $w, v \in V_0$ son equivalentes si $N_0(w - v) = 0$. Sea $V$ la colección de clases de equivalencia $[v]$ y defínase $N([v]) = N_0(v)$. Entonces $N$ es un norma en $V$.

Demostración. Se verifica fácilmente que la relación dada de hecho es una de equivalencia. Luego veamos que $V$ es espacio vectorial, donde se define $[v] + [w] = [v + w]$, $\alpha[v] = [\alpha v]$. Hay que verificar que estas operaciones están bien definidas, i.e, que si $[v] = [v']$, $[w] = [w']$, entonces la definción de $[v] + [w]$ coincide con la de $[v'] + [w']$. Pero

$$\begin{aligned} N_0((v' + w') - (v + w)) &= N_0((v' - v) + (w' - w)) \\ &\leq N_0(v' - v) + N_0(w' - w) = 0 \end{aligned}$$

por lo que $[v + w] = [v' + w']$ y la suma está bien definida. De manera similar $\alpha[v'] = \alpha[v]$. Es fácil verificar las demás condiciones de espacio vectorial.

Hay que verificar que $N$ está bien definida en $V$: si $[v]=[v']$, entonces $N_0(v-v')=0$, luego

$$N_0(v)=N_0(v'+(v-v'))\leq N_0(v')+N_0(v-v')=N_0(v')$$

y por simetría $N_0(v')\leq N_0(v)$, por lo que $N_0(v')=N_0(v)$. Así $N([v])$ está bien definida; es sencillo verificar las demás condiciones para ver que $N$ es una norma. En particular,

(ii) $N([v])=0 \Leftrightarrow N_0(v)=0 \Leftrightarrow N_0(v-0)=0 \Leftrightarrow [v]=[0]$. $\square$

*5.6.* Definición. $L_1 = L_1(X,\mathcal{F},\mu)$ es el espacio vectorial normado, con norma $\|\cdot\|_1$, que se forma del espacio vectorial $L=L(X,\mathcal{F},\mu)$ con la seminorma $N_\mu$.

En el espacio vectorial $L$, sabemos que dos funciones $f,g$ son equivalentes si $f=g$ c.t.p. La clase de equivalencia de $f\in L$ es

$$[f]=\{g\in L:\ f=g \text{ c.t.p.}\}$$

y la norma de un elemento de $L_1$ es

$$\|\,[f]\,\|_1=\int |f|\,d\mu.$$

*5.7.* Los espacios $L_p$. Sea $1\leq p<\infty$. Sea $(X,\mathcal{F},\mu)$ un espacio con medida. Consideremos el espacio vectorial

$$\widetilde{L}_p=\{f\in\mathcal{M}:\int |f|^p\,d\mu<\infty\}.$$

Para $f\in\widetilde{L}_p$, se escribe

$$\|f\|_p=\left(\int |f|^p\,d\mu\right)^{1/p}.$$

Queremos ver que ésta es una seminorma. Usaremos la observación que $f\in\widetilde{L}_p$ si y sólo si $|f|^\alpha\in\widetilde{L}_{p/\alpha}$ (pues $|f|^p=(|f|^\alpha)^{p/\alpha}$). Obsérvese que $\widetilde{L}_1=L$.

*5.8.* Proposición. (Desigualdad de Hölder) Sea $p>1$, y

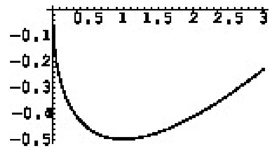
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Sean $f\in\widetilde{L}_p$, $g\in\widetilde{L}_q$. Entonces $fg\in\widetilde{L}_1=L$, y

$$\|fg\|_1\leq\|f\|_p\|g\|_q.$$

Demostración. Consideremos la función real valuada

$$\varphi(t) = \frac{t}{p} - t^{1/p}, \quad t \geq 0.$$




Se calcula $\varphi'(t) = \dfrac{1}{p}(1 - t^{-1/q})$, lo cual es negativo para $0 < t < 1$, positivo para $t > 1$. Por lo tanto, $\varphi(t) \geq \varphi(1) = -1/q$ para todo $t > 0$. De esto

$$t^{1/p} \leq \frac{t}{p} + \frac{1}{q}.$$

Ahora dados $a \geq 0$, $b > 0$, póngase $t = a/b$: tenemos entonces

$$\frac{a^{1/p}}{b^{1/p}} \leq \frac{a}{pb} + \frac{1}{q}$$

que se simplifica a

$$a^{1/p}\, b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Esta desigualdad también es válida cuando $b = 0$. Ahora pongamos $A = a^{1/p}$, $B = b^{1/q}$:

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q} \qquad \text{para todo } A, B \geq 0.$$

Volvamos a $f \in \widetilde{L}_p$, $g \in \widetilde{L}_q$. Si $\|f\|_p = 0$ ó $\|g\|_q = 0$, entonces $fg = 0$ c.t.p., y tenemos $\|fg\|_1 = 0$ como se deseaba. Entonces supongamos que las dos normas son positivas. En todo caso $fg$ es medible. Para $x \in X$ fijo, utilizamos

$$A = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, \quad B = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q},$$

luego

$$\frac{|f(x)|\,|g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p{}^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q{}^q}$$

Como $x$ es arbitrario, esto dice que

$$\frac{|fg|}{\|f\|_p\|g\|_q} \leq \frac{|f|^p}{p\|f\|_p{}^p} + \frac{|g|^q}{q\|g\|_q{}^q} \in L$$

porque $|f|^p, |g|^q \in L$ por hipótesis. Llegamos a la conclusión que $fg \in L$, e integrando ambos lados de esta última desigualdad,

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p\|g\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \qquad \square$$

*5.9.* <u>Corolario.</u> (Desigualdad de Cauchy-Bunyakovskii-Schwarz)
Sean $f, g \in \widetilde{L}_2$. Entonces $fg \in \widetilde{L}_1$ y

$$\left|\int fg\, d\mu\right| \leq \int |fg|\, d\mu \leq \|f\|_2\, \|g\|_2.$$

*5.10.* <u>Proposición.</u> (Desigualdad de Minkowski)
Sea $p \geq 1$ y sean $f, h \in \widetilde{L}_p$. Entonces $f + h \in \widetilde{L}_p$ y

$$\|f + h\|_p \leq \|f\|_p + \|h\|_p.$$

<u>Demostración.</u> Esto ya se sabe para $p = 1$ (desigualdad triangular). Sea $p > 1$. Claramente $f + h \in \mathcal{M}$ ($= \{$medibles$\}$). Observemos que

$$|f + h|^p \leq (2\max(|f|, |h|))^p \leq 2^p(|f|^p + |h|^p) \in L$$

puesto que $|f|^p, |h|^p \in L$ por hipótesis. Por lo tanto $|f + h| \in \widetilde{L}_p$. De esto $f + h \in \widetilde{L}_p$. Además

$$\begin{aligned} |f + h|^p &= |f + h| \cdot |f + h|^{p-1} \leq (|f| + |h|) \cdot |f + h|^{p-1} \\ &\leq |f| \cdot |f + h|^{p-1} + |h| \cdot |f + h|^{p-1}. \end{aligned}$$

Defínase $q$ por $1/p + 1/q = 1$. Entonces $p - 1 = p/q$, y de esto $|f + h|^{p-1} = (|f + h|^p)^{1/q} \in \widetilde{L}_q$ pues $|f + h|^p \in L$. Por la desigualdad de Hölder,

$$\int |f| \cdot |f + h|^{p-1}\, d\mu \leq \|f\|_p\, \|(f + h)^{p-1}\|_q = \|f\|_p \left(\|f + h\|_p\right)^{p/q}.$$

De manera análoga

$$\int |h| \cdot |f + h|^{p-1}\, d\mu \leq \|h\|_p \left(\|f + h\|_p\right)^{p/q}.$$

Juntando estas dos desigualdades y notando que
$|f + h|^p \leq (|f| + |h|)|f + h|^{p-1}$, tenemos

$$\|f + h\|_p{}^p \leq (\|f\|_p + \|h\|_p)\|f + h\|_p{}^{p/q}.$$

Finalmente, podemos suponer $\|f+p\|_p \neq 0$, pues de otro modo la conclusión deseada es trivial. Así dividimos por $\|f+p\|_p{}^{p/q}$ y aplicamos $p - p/q = 1$ para obtener la desigualdad. $\square$

Corolario. $\|\cdot\|_p$ es una seminorma en $\widetilde{L}_p$.

*5.11.* Definición. $L_p = L_p(X, \mathcal{F}, \mu)$ con la norma $\|\cdot\|_p$ es el espacio vectorial normado que se obtiene de $\widetilde{L}_p$ con la seminorma $\|\cdot\|_p$.

(Obsérvese que $f, g \in \widetilde{L}_p$ son equivalentes si $f = g$ c.t.p. Además, nótese que para $p = 1$, las definiciones de $L_1$ y $\|\cdot\|_1$ coinciden con las que se dieron anteriormente.)

Nota. Hemos usado el mismo símbolo $\|\cdot\|_p$ para la seminorma en $\widetilde{L}_p$ y para la norma en $L_p$. Normalmente (o sea, afuera de la conferencia de hoy) también se usa el mismo símbolo $L_p$ para las funciones $p$-integrables y para sus clases de equivalencia (nadie escribe "$\widetilde{L}_p$"). Así de ahora en adelante se podrá escribir "$f \in L_p$" tanto para funciones $f$ como para clases de equivalencia $[f]$.

## ESPACIOS DE BANACH

*5.12.* Definición. Sea $Y$ un espacio métrico con métrica $d$. Una sucesión $\{y_n\}$ en $Y$ se llama sucesión de Cauchy si

$$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists N)\ m, n \geq N \implies d(y_m, y_n) < \epsilon.$$

El espacio métrico se llama completo si toda sucesión de Cauchy tiene un límite.

Ejemplo. $Y = \mathbb{R}^+$, $d(x,y) = \dfrac{|x-y|}{(1+x)(1+y)}$. La sucesión $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy pero no tiene límite.

Definición. Un espacio de Banach es un espacio vectorial normado tal que la métrica asociada a la norma es completa.

*5.13.* Proposición. Sea $(Y, d)$ un espacio métrico, $\{y_n\} \subseteq Y$, $y_n \to y \in Y$. Entonces la sucesión $\{y_n\}$ es de Cauchy.

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, sea $N$ tal que $n \geq N \implies d(y_n, y) < \epsilon/2$. Entonces

$$m, n \geq N \implies d(y_m, y_n) \leq d(y_m, y) + d(y, y_n) \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \quad \square$$

Proposición. Si $\{y_n\}$ es de Cauchy y si una subsucesión de $\{y_n\}$ converge a $y \in Y$, entonces $y_n \to y$.

Demostración. Por las hipótesis digamos $p, q \geq J \implies d(y_p, y_q) < \epsilon/2$, $k \geq K \implies d(y_{n_k}, y) < \epsilon/2$.
Entonces $n \geq N = J + K \implies d(y, y_n) \leq \epsilon$. $\square$

*5.14.* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio con medida.
Proposición. Sea $1 \leq p < \infty$. El espacio $L_p$ es completo.

Demostración. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en $L_p$. Tomemos $N_j$ tal que

$$m, n \geq N_j \implies \|f_m - f_n\|_p < 2^{-j} \text{ y } N_{j+1} > N_j.$$

Definamos $g_j = f_{N_j}$, luego

$$\|g_{j+1} - g_j\|_p < 2^{-j}. \tag{$*$}$$

Al definir

$$g(x) = |g_1(x)| + \sum_{j=1}^{\infty} |g_{j+1}(x) - g_j(x)|, \quad x \in X,$$

tenemos $g \in \mathcal{M}^+$. Por la definición $\sum_{j=1}^{\infty} = \lim \sum_{j=1}^{n}$, tenemos

$$\int |g|^p \, d\mu \overset{\text{Fat.}}{\leq} \liminf_n \int \left( |g_1| + \sum_{j=1}^{n} |g_{j+1}(x) - g_j(x)| \right)^p d\mu,$$

luego

$$\begin{aligned} \left( \int |g|^p \, d\mu \right)^{1/p} &\leq \liminf_n \left( \int \left( \, |g_1| + \sum_{j=1}^{n} |g_{j+1} - g_j| \, \right)^p d\mu \right)^{1/p} \\ &= \liminf_n \left\| \, |g_1| + \sum_{j=1}^{n} |g_{j+1} - g_j| \, \right\|_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{\text{Mink.}}{\leq} \liminf_n \left( \|g_1\|_p + \sum_{j=1}^{n} \|g_{j+1} - g_j\|_p \right) \\
&\stackrel{(*)}{\leq} \|g_1\|_p + 1. \qquad (**)
\end{aligned}$$

Dado que la definición de $\tilde{L}_p$ usaba funciones que nunca valen $\infty$ (recordar la definición de $L = L_1$), tenemos que considerar

$$E = \{x \in X\colon\ g(x) < \infty\} \in \mathcal{F}$$

y notar $\mu(X - E) = 0$ por $(**)$. Así $g\chi_E \in \tilde{L}_p$ es una función que no toma el $\infty$ y es equivalente a $g$. Definamos

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x) + \sum_{j=1}^{\infty}(g_{j+1}(x) - g_j(x)), & x \in E, \\ 0, & x \notin E, \end{cases}$$

y notemos $f = \lim g_k$ en $E$. Ahora

$$|g_k| = \Big|\ g_1 + \sum_{j=1}^{k}(g_{j+1}(x) - g_j(x))\ \Big| \leq |g_1| + \sum_{j=1}^{k}|g_{j+1}(x) - g_j(x)| \leq |g|.$$

Por esto $|g_k|^p \leq g^p$; la función $g^p$ es integrable, y $(g_k)^p \to f^p$ c.t.p. (porque $g_k(x) \to f(x)$ para $x \in E$). Por el Teorema de Convergencia Dominada, $f \in L_p$ y

$$f = g_1 + \sum_{j=1}^{\infty}(g_{j+1} - g_j) = g_k + \sum_{j=k}^{\infty}(g_{j+1} - g_j)$$

lo cual nos dice

$$|f - g_k| \leq \left|\sum_{j=k}^{\infty}(g_{j+1} - g_j)\right| \leq \sum_{j=k}^{\infty}|g_{j+1} - g_j|$$

luego $|f - g_k|^p \leq g^p$, luego $|f - g_k|^p$ es integrable. Por el Teorema de Convergencia Dominada,

$$\lim \int |f - g_k|^p \, d\mu = \int \lim_k |f - g_k|^p \, d\mu = 0$$

de lo cual $\|f - g_k\|_p \to 0$ cuando $k \to \infty$. Por eso la subsucesión $\{g_k\}$ de $\{f_n\}$ converge a $f$ en $L_p$. Puesto que $\{f_n\}$ es de Cauchy, converge a $f$. □

El valor de saber que un espacio es de completo es que nos permite construir funciones nuevas en términos de límites, simplemente verificando desigualdades (condición de Cauchy). Lo haremos muchas veces en la próxima sección.

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio con medida.

*5.15.* Sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función medible. Escribiremos

$$\|f\|_\infty = \inf \{\sup_{X\setminus N} |f|\colon\ N \in \mathcal{F},\ \mu(N) = 0\} \quad (\leq \infty).$$

Definición. $\tilde{L}_\infty = \tilde{L}_\infty(X, \mathcal{F}, \mu) = \{f\colon\ \|f\|_\infty < \infty\}$.
Decimos que $f$ es esencialmente acotada cuando $f \in \tilde{L}_\infty$.

Nota. Cuando el único conjunto $N$ para el cual $\mu(N) = 0$ es $N = \varnothing$, entonces todas las funciones esencialmente acotadas son acotadas.

*5.16.* Proposición. $\|\cdot\|_\infty$ es una seminorma en $\tilde{L}_\infty$.

Demostración. Sean $f, g \in \tilde{L}_\infty$. Tomemos $\epsilon > 0$. Entonces hay $N_1, N_2 \in \mathcal{F}$ con $\mu(N_1) = 0 = \mu(N_2)$ y

$$\sup_{X\setminus N_1} |f| < \|f\|_\infty + \epsilon/2, \qquad \sup_{X\setminus N_2} |g| < \|g\|_\infty + \epsilon/2.$$

Entonces con $N = N_1 \cup N_2$,

$$\begin{aligned} \sup_{X\setminus N} |f+g| &\leq \sup_{X\setminus N} (|f| + |g|) \\ &\leq \sup_{X\setminus N_1} |f| + \sup_{X\setminus N_2} |g| \\ &\leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f\|_\infty + \epsilon$, que es la desigualdad triangular. Las demás propiedades de seminorma son triviales. $\square$

Definición. $L_\infty = L_\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ es el espacio vectorial con la norma $\|\cdot\|_\infty$ que viene de $\tilde{L}_\infty$ con la seminorma $\|\cdot\|_\infty$.

Recordemos que las clases de equivalencia son de funciones cuya diferencia tiene seminorma cero.

*5.17.* Proposición. Sea $f \in L_\infty$. Entonces $\|f\|_\infty = 0 \iff f = 0$ c.t.p.

Demostración. $\Leftarrow$ es trivial. Para $\Rightarrow$, sea $\|f\|_\infty = 0$. Podemos tomar $N_k \in \mathcal{F}$ con $\mu(N_k) = 0$ y $|f(x)| < 1/k$ para $x \notin N_k$. Tomemos

$N = \bigcup N_k$, luego $\mu(N) = 0$ además que $x \notin N \implies f(x) = 0$. Esto dice que $f = 0$ c.t.p. $\square$

En algunos aspectos la norma $\|\cdot\|_\infty$ se porta como un límite de las normas $\|\cdot\|_p$ cuando $p \to \infty$, pero hay muchas propiedades que no son las mismas para el espacio "límite" y siempre se tienen que investigar por separado.

ANÁLISIS REAL $\#6$

# MODOS DE CONVERGENCIA

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Investigaremos y compararemos los siguientes tipos de convergencia: puntual, c.t.p., en $L_p$, en medida, uniforme, casi uniforme.

Está claro que para una secuencia $\{f_n\}$ de funciones medibles se tiene

$$\text{conv. uniforme} \implies \text{conv. puntual} \implies \text{conv. c.t.p.}$$

Aunque c.t.p. $\not\Rightarrow$ puntual, con respecto a las demás propiedades c.t.p. tiene las mismas relaciones que puntual.

*6.1.* <u>"conv. uniforme $\not\Rightarrow$ conv. en $L_p$"</u>
<u>Ejemplo.</u> Sea $(X, \mathcal{F}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \text{Lebesgue})$. Fijemos $1 \leq p < \infty$. Sea

$$f_n = \frac{1}{n^{1/p}} \chi_{[0,n]}.$$

Entonces para todo $x$, $|f_n(x) - 0| = \begin{cases} n^{-1/p}, & 0 \leq x < n, \\ 0, & \text{de otro modo,} \end{cases}$

por lo cual $|f_n(x) - 0| \leq n^{1/p}$ por todo $x \in \mathbb{R}$. Esta cota converge a 0 cuando $n \to \infty$, por lo que $f_n \to 0$ uniformemente. Pero

$$\|f_n - 0\|_p = \left( \int |f_n - 0|^p d\,\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_0^n \frac{1}{n}\, dx \right)^{\frac{1}{p}} = 1.$$

Por lo tanto $f_n$ no converge a 0 en $L_p$.

<u>Proposición.</u> Sea $1 \leq p < \infty$. Supongamos que $\mu(X) < \infty$, que $\{f_n\} \subseteq L_p$ y que $f_n \to f$ uniformemente en $X$.
Entonces $f \in L_p$ y $f_n \to f$ en $L_p$.

<u>Demostración.</u> Dado $\epsilon > 0$, tomemos $N$ tal que para cada $x \in X$, $n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.
Entonces para $n \geq N$,

$$\|f_n - f\|_p = \left( \int |f_n - f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int \epsilon^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \epsilon\, \mu(X)^{\frac{1}{p}}$$

por lo que $\|f_n - f\|_p \to 0$ cuando $n \to \infty$. $\square$

6.2. <u>"conv. c.t.p., $\mu(X) < \infty \not\Rightarrow$ conv. en $L_p$"</u>

<u>Ejemplo.</u> Sea $(X, \mathcal{F}, \mu) = ([0,1], \mathcal{B}, \text{Lebesgue})$, y sean $f_n = n\chi_{(0,1/n]}$. Entonces $f_n \to 0$ puntualmente (¡no uniformemente!), pero

$$\|f_n - 0\|_p = \left( \int_0^{1/n} n^p \, dx \right)^{1/p} = n^{1-1/p},$$

lo cual diverge cuando $n \to \infty$. Por lo tanto $f_n \not\to 0$ en $L_p$.

<u>Proposición.</u> Sea $f_n \to f$ c.t.p. Supongamos que $g \in L_p$, $|f_n| \leq g$. Entonces $f \in L_p$ y $f_n \to f$ in $L_p$.

<u>Demostración.</u> Tenemos $|f| = \lim |f_n| \leq g$ c.t.p., por lo tanto $f \in L_p$. Ahora

$$|f_n - f|^p \;\leq\; (|f_n| + |f|)^p \overset{\text{c.t.p.}}{\leq} (2g)^p \;=\; 2^p \, |g|^p$$

pero $|g|^p \in L_1$. Como $|f_n - f|^p \to 0$ c.t.p. y la sucesión $\{|f_n - f|^p\}$ está dominada por un elemento de $L_1$, el Teorema de Convergencia Dominada dice que

$$\|f_n - f\|_p^p = \int |f_n - f|^p \, d\mu \to \int 0 \, d\mu = 0,$$

así que $f_n \to f$ en $L_p$. $\square$

<u>Corolario.</u> Supóngase que $\mu(X) < \infty$, y sea $\{f_n\} \subset L_p$, con $f_n \to f$ c.t.p. donde la sucesión $\{f_n\}$ es uniformemente acotada c.t.p. ($|f_n| \leq K$ c.t.p.). Entonces $f_n \to f$ in $L_p$.

6.3. <u>"$L_p \not\Rightarrow$ c.t.p."</u>

<u>Ejemplo.</u> Sean $I_n$ los intervalos $[0,1], [0, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, 1], [0, \frac{1}{3}], [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], [\frac{2}{3}, 1], \ldots$ y defínase $f_n = \chi_{I_n}$. Sea $f$ la función 0.
Entonces $\|f_n - f\|_p \to 0$, pero para $x \in [0,1]$ se tiene $f_n(x) \not\to f(x)$.

6.4. <u>Definición.</u> Se dice que $f_n \to f$ <u>en medida</u> cuando $(\forall \alpha > 0)$

$$\mu\left(\{x \in X\colon \; |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}\right) \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

La sucesión $\{f_n\}$ es <u>de Cauchy en medida</u> cuando $(\forall \alpha > 0)$

$$\mu\left(\{x \in X\colon \; |f_n(x) - f_m(x)| \geq \alpha\}\right) \to 0 \text{ cuando } m, n \to \infty.$$

6.5. <u>"en medida $\not\Rightarrow$ puntualmente</u>

<u>Ejemplo.</u> Del ejemplo anterior se ve que $f_n = \chi_{I_n} \to 0$ en medida pero no puntualmente.

*6.6.* Proposición. $f_n \to f$ uniformemente $\implies$ $f_n \to f$ en medida.

Demostración. Sea $f_n \to f$ uniformemente. Sea $\alpha > 0$. Entonces $(\exists N)\ n \geq N \implies (\forall x)\,|f_n(x) - f(x)| < \alpha$. Por lo tanto
$n \geq N \implies \mu(\{x \in X\colon\ |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}) = \mu(\varnothing) = 0$. □

*6.7.* "conv. puntual $\not\Rightarrow$ conv. en medida"
**Ejemplo.** Sea $f_n = \chi_{[n,n+1]}$. Obviamente $f_n \to 0$ puntualmente, pero $\mu(\{x \in X\colon\ |f_n(x) - 0| \geq \frac{1}{2}\}) = 1$ para todo $n$. Por lo tanto $f_n \not\to f$ en medida. □

*6.8.* Proposición. $f_n \to f$ en $L_p$ $\implies$ $f_n \to f$ en medida.

Demostración. Fijemos $\alpha > 0$ y definamos

$$E_n = \{x \in X\colon\ |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}.$$

Entonces

$$\int |f_n - f|^p \, d\mu \geq \int_{E_n} |f_n - f|^p \, d\mu \geq \int_{E_n} \alpha^p \, d\mu = \alpha^p \, \mu(E_n).$$

Como $f_n \to f$ en $L_p$, entonces $\mu(E_n) \leq \alpha^{-p} \|f_n - f\|_p^p \to 0$ cuando $n \to \infty$. Entonces $f_n \to f$ en medida. □

*6.9.* El siguiente es el primer paso para entender el concepto de "Cauchy en medida".
Teorema. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en medida. Entonces existe $f$ medible y una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ tal que $f_{n_k} \to f$ c.t.p. y $f_{n_k} \to f$ en medida.

Demostración. Tomemos $N_k$ tal que

$$m, n \geq N_k \implies \mu\left(\{x\colon\ |f_m(x) - f_n(x)| \geq 2^{-k}\}\right) < 2^{-k},$$

y $N_{k+1} > N_k$. Definimos $g_k = f_{N_k}$ y

$$E_k = \{x\colon\ |g_{k+1}(x) - g_k(x)| \geq 2^{-k}\}.$$

Por construcción $\mu(E_k) \leq 2^{-k}$. Sea $F_k = \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j$, por lo tanto $F_k \in \mathcal{F}$ y

$$\mu(F_k) \leq \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-(k-1)}.$$

Al definir $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$ se tiene que $F \in \mathcal{F}$ y $\mu(F) = 0$.
Supongamos ahora que $x \notin F_k$ para algún $k$, y sea $m \geq n \geq k$. Entonces

$$\begin{aligned} |g_m(x) - g_n(x)| &\leq |g_m(x) - g_{m-1}(x)| + \cdots + |g_{n+1}(x) - g_n(x)| \\ &\leq \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m-2}} + \cdots + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n-1}} \qquad (*) \end{aligned}$$

Así, $\{g_m(x)\}$ es de Cauchy y tiene un límite. Ahora, si $x \notin F$, entonces $x \notin F_k$ para algún $k$. Por lo tanto $\{g_m(x)\}$ converge para $x \notin F$ y podemos definir

$$f(x) = \begin{cases} \lim g_m(x), & x \notin F, \\ 0, & x \in F. \end{cases}$$

Por construcción $f \in \mathcal{M}$. Así que tenemos que $g_m \to f$ c.t.p. Ahora, usando $(*)$ y tomando $m \to \infty$, si $x \notin F_k$ tenemos para $n \geq k$

$$|f(x) - g_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{2^{k-1}}. \qquad (**)$$

Por lo que $g_n \to f$ uniformemente en $X \setminus F_k$. En particular, $g_n \to f$ en $X \setminus F$, o sea c.t.p.

Finalmente, sea $\alpha > 0$ y sea $\epsilon > 0$. Tenemos $\mu(F_k) < 2^{-(k-1)}$.
Tomemos $k$ tal que $2^{-(k-1)} < \min(\alpha, \epsilon)$. Sea $n \geq k$.
Entonces por los hechos $\alpha > 2^{-(k-1)}$ y $(**)$,

$$\{x\colon\ |f(x) - g_n(x)| \geq \alpha\} \subseteq \{x\colon\ |f(x) - g_n(x)| \geq \frac{1}{2^{k-1}}\} \subseteq F_k.$$

Así $\mu(\{x : |f(x) - g_n(x)| \geq \alpha\}) \leq \mu(F_k) < \epsilon$ para todo $n \geq k$, lo cual significa que $g_n \to f$ en medida. $\square$

Ejercicio. Observar de cerca al ejemplo anterior con $f_n = \chi_{I_n}$, y ver dónde los conjuntos $E_n, F_n$ aparecen en la demostración.

Mejoraremos el resultado anterior, que nó sólo converge en medida en una subsucesión, sino en toda la sucesión original.

*6.10.* Teorema. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en medida. Entonces existe $f$ tal que $f_n \to f$ en medida. Dicha función $f$ es única hasta c.t.p.; es decir, si $f_n \to g$ en medida también, entonces $g = f$ c.t.p.

Demostración. Sabemos que existe una subsucesión $f_{n_k}$ y una $f$ tal que $f_{n_k} \to f$ en medida cuando $k \to \infty$. También

$$|f(x) - f_k(x)| \ \leq\ |f(x) - f_{n_k}(x)| \ +\ |f_{n_k}(x) - f_k(x)|.$$

Por lo tanto $\{x\colon\ |f(x)-f_k(x)|\geq\alpha\}\subseteq$

$$\{x\colon\ |f(x)-f_{n_k}(x)|\geq\frac{\alpha}{2}\}\ \cup\ \{x\colon\ |f_{n_k}(x)-f_k(x)|\geq\frac{\alpha}{2}\}.$$

$=A_k\cup B_k$ donde $\mu(A_k)\to 0$ porque $f_{n_k}\to f$ en medida, mientras $\mu(B_k)\to 0$ porque $\{f_k\}$ es de Cauchy en medida y $n_k\geq k$. Dado que $\mu(A_k\cup B_k)\to 0$ cuando $k\to\infty$, hemos verificado que existe un límite $f$ de $\{f_k\}$ en medida.
Para la unicidad, sean $f_n\to f, f_n\to g$ en medida. Notemos que

$$|f(x)-g(x)|\ \leq\ |f(x)-f_n(x)|\ +\ |f_n(x)-g(x)|.$$

Por lo tanto $\{x\colon\ |f(x)-g(x)|\geq\alpha\}\subseteq$

$$\{x:|f(x)-f_n(x)|\geq\frac{\alpha}{2}\}\ \cup\ \{x:|f_n(x)-g(x)|\geq\frac{\alpha}{2}\}$$

$=A_n\cup B_n$ donde $\mu(A_n),\mu(B_n)\to 0$ por la convergencia en medida. Dado que $E_\alpha=\{x\colon\ |f(x)-g(x)|\geq\alpha\}$ no depende de $n$, se sigue que $\mu(E_\alpha)=0$ para toda $\alpha>0$.

Finalmente $\mu(\{x\colon f(x)\neq g(x)\})=\mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}E_{1/m}\right)=0$, por lo que $f=g$ c.t.p. $\square$

*6.11.* "en medida $\not\Rightarrow$ en $L_p$"

Ejemplo. Sea $f_n=\frac{1}{\sqrt[p]{n}}\chi_{[0,n]}$. Ya sabemos que $f_n\not\to 0$ en $L_p$ aunque $f_n\in L_p$. Además $f_n\to 0$ uniformemente, luego $f_n\to 0$ en medida.

*6.12.* Proposición. Sea $f_n\to f$ en medida cuando $n\to\infty$. Supóngase que $g\in L_p$ y que

$$|f_n(x)|\leq g(x)\text{ c.t.p.}$$

Entonces $f_n\to f$ en $L_p$.

Demostración. Supongamos que $f_n\not\to f$ en $L_p$. Hay $\epsilon>0$ y una subsucesión $\{g_k\}=\{f_{n_k}\}$ tal que

$$\|g_k-f\|_p>\epsilon\text{ para todo }k. \qquad (*)$$

Esto implica que $g_k\to f$ en medida. Tomemos otra subsucesión $\{h_j\}=\{g_{k_j}\}$, $h_j\to h$ c.t.p. y $h_j\to h$ en medida. Pero $h_j\to f$ en medida, y por la unicidad $h=f$ c.t.p. Por lo tanto $h_j\to f$ c.t.p.

Además $|h_j(x)| \le g(x)$ c.t.p. a la vez que $h_j \in L_p$, luego un resultado anterior nos garantiza que $h_j \to f$ en $L_p$. Esto contradice $(*)$. Por lo tanto podemos concluir que $f_n \to f$ en $L_p$. $\square$

*6.13.* Convergencia casi uniforme. Consideremos $f_n, f \in \mathcal{M}$.

Definición. Se dice que $f_n \to f$ casi uniformemente si
$(\forall \epsilon > 0)(\exists E \in \mathcal{F})\ \mu(E) < \epsilon$ y $f_n \to f$ uniformemente en $X \setminus E$.
Se dice que $\{f_n\}$ es casi uniformemente de Cauchy si $(\forall \epsilon > 0)$
$(\exists E \in \mathcal{F})\ \mu(E) < \epsilon$ y $\{f_n\}$ converge uniformemente en $X \setminus E$.

(Si se dijera "$\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy en $X \setminus E$" sería lo mismo.)

La idea de "casi uniforme de Cauchy" se puede resumir en lo siguiente:
Proposición. Sea $\{f_n\}$ una sucesión casi uniformemente de Cauchy. Entonces hay $f \in \mathcal{M}$ tal que $f_n \to f$ casi uniformemente y tal que $f_n \to f$ c.t.p.

Demostración. Para cada $k$ tomemos $E_k \in \mathcal{F}$ con $\mu(E_k) < 2^{-k}$, tal que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $X \setminus E_k$.

Sea $F_k = \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j$, luego $\mu(F_k) < 2^{-(k-1)}$.

Como $F_k \supseteq E_k$, tenemos $X \setminus F_k \subseteq X \setminus E_k$, conjunto en que $\{f_n\}$ converge uniformemente. Así podemos definir la función medible

$$g_k(x) = \begin{cases} \lim f_n(x), & x \notin F_k, \\ 0, & x \in F_k. \end{cases}$$

Como $F_k \supseteq F_{k+1}$, ponemos $F = \bigcap F_k$, luego $\mu(F) = 0$.
Ahora $k' \ge k \implies (\forall x \notin F_k)\ g_{k'}(x) = g_k(x)$.
Por lo tanto $\{g_k(x)\}$ converge para todo $x$ que no esté en $F$, así escribimos $f = \lim\limits_k g_k$ en $X \setminus F$, $f = 0$ en $F$. Notemos que $x \notin F_k \implies f(x) = g_k(x) = \lim f_n(x)$.
Así $f_n(x) \to f(x)$ para $x \in X \setminus F$, es decir $f_n \to f$ c.t.p.

Falta ver que $f_n \to f$ casi uniformemente. Sea $\epsilon > 0$ y tomemos $k$ tal que $2^{-(k-1)} < \epsilon$. Entonces $\mu(F_k) < \epsilon$ y $f_n \to g_k = f$ uniformemente en $X \setminus F_k$. $\square$

*6.14.* Proposición. Sea $f_n \to f$ casi uniformemente. Entonces $f_n \to f$ en medida.

Demostración. Sea $\alpha, \epsilon > 0$. Tomemos $E \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(E) < \epsilon$, con $f_n \to f$ uniformemente en $X \setminus E$. Ahora $\{x\colon |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\} \subseteq E$ cuando $n$ es suficientemente grande (pues intersecta a $X \setminus E$ en el vacío), así que $\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}) \leq \mu(E) < \epsilon$, por lo que $f_n \to f$ en medida. □

*6.15.* Proposición. Sea $h_n \to h$ en medida. Entonces hay una subsucesión $h_{n_k}$ que converge a $h$ casi uniformemente.

Demostración. En la demostración de la proposición transitoria de que Cauchy en medida implica una subsucesión $\{g_k\} = \{h_{n_k}\}$ con $g_k \to g$ en medida para alguna función $g$, la construcción da de hecho que $g_k \to g$ casi uniformemente (teníamos $|g_k(x) - g(x)| \leq 2^{-(k-1)}$ para $x \notin F_k$, luego convergen uniformemente en $X \setminus F_k$).
Por la proposición anterior $g_k \to g$ en medida. Por ser $\{g_k\}$ subsucesión de $\{h_n\}$, $g_k \to h$ en medida. Los dos límites son iguales: $g = h$ c.t.p. Así $g_k \to h$ casi uniformemente. □

*6.16.* Proposición. Sea $f_n \to f$ en $L_p$. Entonces existe una subsucesión $f_{n_k}$ que converge a $f$ casi uniformemente.

Demostración. Como $f_n \to f$ en $L_p$ tenemos $f_n \to f$ en medida, luego la proposición anterior da la subsucesión requerida. □

*6.17.* "casi uniformemente $\not\Rightarrow$ en $L_p$"
Ejemplo. Sea $f_n = n\chi_{(0,1/n]}$. Entonces $f_n \to 0$ uniformemente fuera de $[0, \epsilon]$, luego la convergencia es casi uniforme. (No converge uniformemente, ni siquiera afuera de algún conjunto de medida cero.) Ya vimos que $\{f_n\}$ no converge en $L_p$ aunque $f_n \in L_p$.

Proposición. Sea $f_n \in L_p$, $f_n \to f$ casi uniformemente. Supóngase que para una $g \in L_p$, $|f_n| \leq g$. Entonces $f_n \to f$ en $L_p$.

Demostración. La convergencia casi uniforme implica $f_n \to f$ en medida. Ya probamos que con la dominación por una función en $L_p$, esto da $f_n \to f$ en $L_p$. □

*6.18.* "conv. c.t.p. $\not\Rightarrow$ conv. casi uniformemente"
Ejemplo. Sea $f_n = \chi_{[n,n+1]}$. Entonces $f_n \to 0$ puntualmente. Como los conjuntos $\{|f_n| > 1/2\}$ tienen medida 1, no existe un conjunto de medida $< 1/2$ en el que converja uniformemente. Por lo tanto $\{f_n\}$

no converge a cero casi uniformemente.

Proposición. (Teorema de Egoroff) Sea $\mu(X) < \infty$, $f_n \to f$ c.t.p. Entonces $f_n \to f$ casi uniformemente, y por tanto en medida.

Demostración. Podemos suponer que $f_n \to f$ en todo punto.
Consideremos

$$E_n(m) = \bigcup_{k=n}^{\infty} \left\{ x : |f_k(x) - f(x)| \geq \frac{1}{m} \right\} \in \mathcal{F}.$$

Luego $E_{n+1}(m) \subseteq E_n(m)$. La hipótesis $(\forall x)\ f_n(x) \to f(x)$ implica

$(\forall m)\ \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n(m) = \varnothing.$

Pero $\mu(X) < \infty$, así $\mu(E_n(m)) \to 0$ cuando $n \to \infty$.
Sea $\epsilon > 0$. Tomemos $k_m \to \infty$ tal que $\mu(E_{k_m}(m)) < 2^{-m}\epsilon$.
Escribamos

$$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_{k_m}(m).$$

Entonces $E \in \mathcal{F}$, $\mu(E) < \epsilon$.
Para $x \notin E$ se tiene $x \notin E_{k_m}(m)$, de donde

$$k \geq k_m \implies |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{m}.$$

Por lo tanto $\{f_n\}$ converge uniformemente en $X \setminus E$.
Por lo tanto $\{f_n\}$ converge casi uniformemente. $\square$

Proposición. Sea $f_n \to f$ c.t.p., con $|f_n| < g \in L_p$. Entonces $f_n \to f$ casi uniformemente.

Demostración. Definamos $E_n(m)$ como en la demostración del Teorema de Egoroff, recordemos $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n(m) = \varnothing$. Como

$$x \in E_1(m) \implies (\exists k)\ |f_k(x) - f(x)| \geq \frac{1}{m} \implies 2g(x) > \frac{1}{m},$$

y como $g \in L_p$, necesariamente $\mu(E_1(m)) < \infty$.
Entonces $\mu(E_n(m)) \to 0$ cuando $n \to \infty$, y la demostración continúa como en la anterior. $\square$

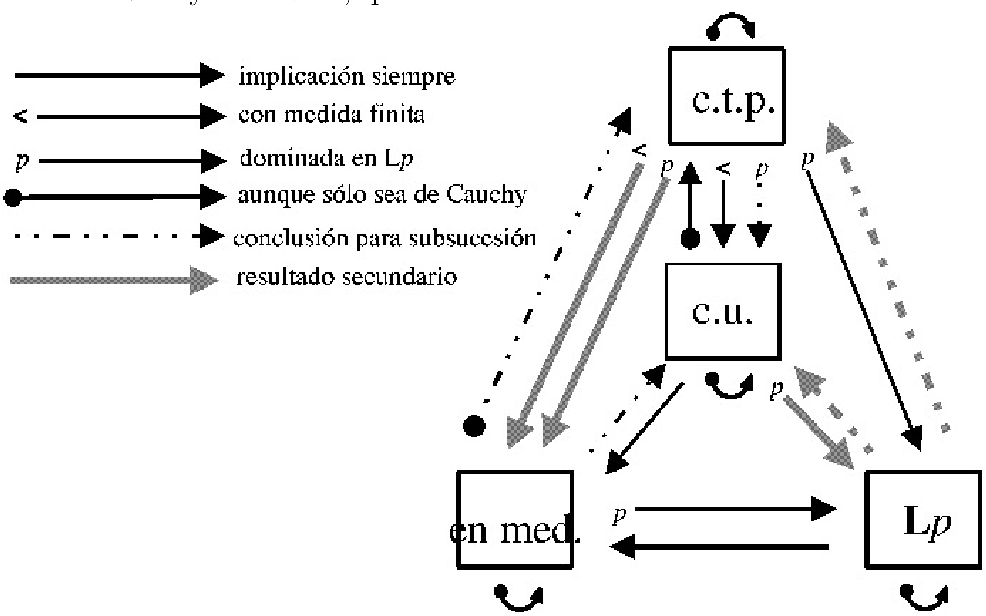
COMBINACIÓN DE LOS RESULTADOS SOBRE
MODOS DE CONVERGENCIA

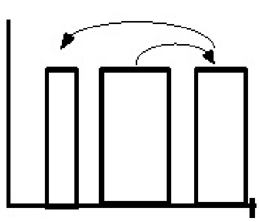
Consideremos las convergencias: (1) c.t.p., (2) en medida, (3) en $L_p$, (4) casi uniforme. Algunas implican otras, mientras hemos visto contraejemplos a ciertas otras implicaciones.

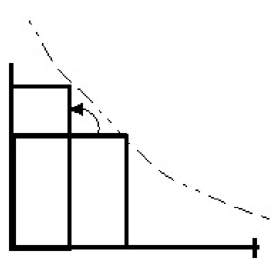
También hay resultados de la forma

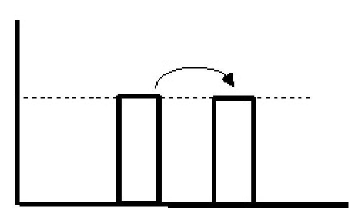
- "si el espacio es de medida finita, A implica B"
- "dominada por una función en $L_p$, A implica B"
- "si la sucesión es A-Cauchy, entonces B"
- "A implica que una subsucesión es B"

etc. Hay otras implicaciones A $\Longrightarrow$ C de donde hemos probado A $\Longrightarrow$ B y B $\Longrightarrow$ C, que llamaremos "resultados secundarios".



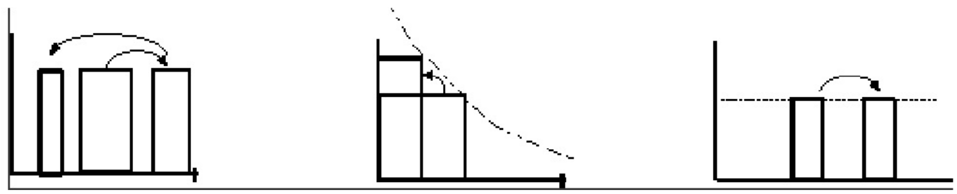







Los siguientes tres ejemplos cubren todas las posibilidades, en el sentido de que cualquier afirmación que no sea contradicha por uno de ellos es de hecho una implicación válida (se podrá usar para detectar las implicaciones, *pero no como demostración en un examen.*)

I. II. III.



**I.** Satisface $\mu(X) < \infty$

| | |
|---|---|
| c.t.p.: | NO (subs. SI) |
| en med.: | SI |
| en $L_p$: | SI |
| c.u.: | NO (subs. SI) |

**II.** Satisface $\mu(X) < \infty$
No dominado en $L_p$

| | |
|---|---|
| c.t.p.: | SI |
| en med.: | SI |
| en $L_p$: | NO |
| c.u: | SI |

**III.** No dominado en $L_p$

| | |
|---|---|
| c.t.p: | SI |
| en med.: | NO |
| en $L_p$: | NO |
| c.u.: | NO |

c.t.p. $\leftrightarrow$ en med.

1. c.t.p. $\not\Rightarrow$ en med. (por III)
1′. c.t.p., finito $\Rightarrow$ en med. (III no es finito)
1″. c.t.p., $L_p$-dom. $\Rightarrow$ en med. (III no es dom.)
2. en med. $\not\Rightarrow$ c.t.p. (por I)
2′. en med. $\Rightarrow$ subsuces. c.t.p. (I tiene)

c.t.p. $\leftrightarrow$ $L_p$

1. c.t.p. $\not\Rightarrow$ $L_p$ (por II)
1′. c.t.p., $L_p$-dom. $\Rightarrow$ $L_p$ (II,III no son dom.)
2. $L_p$ $\not\Rightarrow$ c.t.p. (por I)
2′. $L_p$ $\Rightarrow$ subsuces. c.t.p. (I tiene)

c.t.p. $\leftrightarrow$ c.u.

1. c.t.p. $\not\Rightarrow$ c.u. (por III)
1′. c.t.p., finito $\Rightarrow$ c.u (III no es finito)
1″. c.t.p., $L_p$-dom. $\Rightarrow$ c.u (III no es $L_p$-dom.)
2. c.u. $\Rightarrow$ c.t.p.

$L_p$ $\leftrightarrow$ c.u.

1. $L_p$ $\not\Rightarrow$ c.u. (I tiene)
1′. $L_p$ $\Rightarrow$ subsuces. c.u. (por I)
2. c.u. $\not\Rightarrow$ $L_p$ (por II)
2′. c.t.p., $L_p$-dom. $\Rightarrow$ $L_p$ (II,III no son dom.)

en med. $\leftrightarrow$ c.u.

1. en med. $\not\Rightarrow$ c.u. (por I)
1′. en med.$\Rightarrow$ subsuces. c.u. (I tiene)
2. c.u. $\Rightarrow$ en med.

en med. $\leftrightarrow$ $L_p$

1. en med. $\not\Rightarrow$ $L_p$ (por II)
1′. en med., $L_p$-dom. $\Rightarrow$ $L_p$ (II no es dom.)
2. $L_p$ $\Rightarrow$ en med.

ANÁLISIS REAL #7

## DESCOMPOSICION DE MEDIDAS

*7.1.* Definición. Una *medida signada* en $(X,\mathcal{F})$ es una función conjuntista $\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ (no se le permite tomar los valores $\pm\infty$) que es contablemente aditiva.

Ejemplo. Toda medida finita es una medida signada, pero no toda medida signada es una medida.
La diferencia $\lambda=\mu_1-\mu_2$ de dos medidas finitas es una medida signada.
La integral indefinida $\lambda(E)=\int_E f\,d\mu$ de una función integrable es una medida signada.

Ejemplo. Tomar puntos distintos $x_n\in X$, y números $a_n\in\mathbb{R}$ tales que $\sum|a_n|$ sea convergente. Definir $\lambda(E)=\displaystyle\sum_{n:\ x_n\in E}a_n$.

Proposición. Se verifica, igual como para las medidas, que cuando $\lambda$ es medida signada,

- $E\subseteq F \implies \lambda(F\setminus E)=\lambda(F)-\lambda(E)$;
- $(\forall n)\ E_n\subseteq E_{n+1} \implies \lambda(\bigcup E_n)=\lim_n\lambda(E_n)$;
- $(\forall n)\ F_{n+1}\subseteq F_n \implies \lambda(\bigcap F_n)=\lim_n\lambda(F_n)$.

*7.2.* Definición. El conjunto $P\in\mathcal{F}$ es *positivo para* $\lambda$ si $(\forall A\in\mathcal{F})$ $A\subseteq P \implies \lambda(A)\ge 0$. Análogamente: *negativo*, *nulo* para $\lambda$.

Nota. (No caer en el error de pensar que $A$ es nulo cuando $\lambda(A)=0$.)

Proposición. (i) Sea $P$ positivo para $\lambda$ y sea $A\in\mathcal{F}$, $A\subseteq P$. Entonces $A$ es positivo para $\lambda$.
(ii) Sean $P_1,P_2,\ldots$, positivos para $\lambda$. Entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty}P_n$ es positivo para $\lambda$.

*7.3.* Teorema. (de Descomposición de Hahn) Sea $\lambda$ una medida signada en $(X,\mathcal{F})$. Entonces existen $P$ positivo, $N$ negativo para $\lambda$ tales que $X=P\cup N$ y $P\cap N=\varnothing$.
Demostración. Pongamos $\mathcal{P}=\{\text{subconjuntos positivos de } X\}$. Sea $\alpha=\sup\{\lambda(A)\colon\ A\in\mathcal{P}\}$. Tomemos $A_n\in\mathcal{P}$ con $\lambda(A_n)\to\alpha$, y luego pongamos

$$P = \bigcup_1^\infty A_n.$$

Entonces $P$ es positivo para $\lambda$. Las uniones $\bigcup_1^m A_n \in \mathcal{F}$ son positivas y crecientes con respecto a $m$, $\lambda(\bigcup_1^m A_n) \xrightarrow{m} \alpha$. Podemos suponer entonces que los $A_n$ son crecientes. De esto se sigue que $\lambda(P) = \alpha$ y en particular $\alpha < \infty$.

Es más complicado verificar que el complemento $N = X \setminus P$ es negativo. Supongamos que esto fuera falso: habría $E \subseteq N$ con $\lambda(E) > 0$. Tal $E$ no es positivo, pues $P \cup E$ sería positivo con medida más de $\alpha$. Así $E$ contiene un subconjunto con medida signada negativa. Sea

$$n_1 = \min\{n \in \mathbb{N}\colon\ E \text{ tiene un subconjunto de medida } \leq -\frac{1}{n}\}$$

y tomemos $E_1 \subseteq E$ con $\lambda(E_1) \leq -\frac{1}{n_1}$. Tenemos

$$\lambda(E \setminus E_1) = \lambda(E) - \lambda(E_1) \geq \lambda(E) + \frac{1}{n_1} > \lambda(E) > 0.$$

De manera similar vemos que $E \setminus E_1$ no puede ser positivo, contiene un subconjunto con medida signada negativa, y ponemos

$$n_2 = \min\{n \in \mathbb{N}\colon\ E \setminus E_1 \text{ tiene un subconjunto de medida } \leq -\frac{1}{n}\}$$

y tomamos $E_2 \subseteq E \setminus E_1$ con $\lambda(E_2) \leq -\frac{1}{n_2}$. Siguiendo obtenemos $\lambda(E_k) \leq -\frac{1}{n_k}$. Pongamos

$$F = \bigcup_1^\infty E_k.$$

Entonces $\lambda(F) = \sum \lambda(E_k) \leq -\sum_1^\infty \frac{1}{n_k} < 0$. Esto dice que la serie $\sum \frac{1}{n_k} < -\lambda(F)$ converge. Esto implica que $n_k \to \infty$.

Con esto entre manos, sea $G$ un subconjunto medible de $E \setminus F$. Supóngase que $\lambda(G) < 0$. Como $n_k \to \infty$ tendríamos

$$\lambda(G) < -\frac{1}{n_k - 1}$$

para $k$ grande. Fijemos un tal $k$. Entonces $G \subseteq E \setminus (E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_{n_{k-1}})$, mientras por la forma en que se escogió $n_k$ no puede haber un subconjunto con medida $< -1/n$ para ningún $n < n_k$. Por esta contradicción, sabemos que $\lambda(G) \geq 0$, por lo que $E \setminus F$ es un conjunto positivo, $E \setminus F \subseteq N = X \setminus P$. Además $\lambda(E \setminus F) = \lambda(E) - \lambda(F) > \lambda(E) > 0$, luego el conjunto $P \cup (E \setminus F)$ también es positivo y mide más de $\alpha$, que es una contradicción.

La conclusión es que $N$ es negativo para $\lambda$, y tenemos la descomposicón de Hahn $X = P \cup N$. $\square$

Proposición. Sean $(P_1, N_1)$, $(P_2, N_2)$ descomposiciones de Hahn para $\lambda$. Entonces para cualquier $E \in \mathcal{F}$,

$$\lambda(E \cap P_1) = \lambda(E \cap P_2), \quad \lambda(E \cap N_1) = \lambda(E \cap N_2).$$

Demostración. $E \cap (P_1 \setminus P_2) \subseteq P_1$, $E \cap (P_1 \setminus P_2) \subseteq N_2$, luego $\lambda(E \cap (P_1 \setminus P_2)) = 0$. Como $E \cap P_1 = (E \cap P_1 \setminus P_2) \cup (E \cap P_1 \cap P_2)$ tenemos $\lambda(E \cap P_1) = \lambda(E \cap P_1 \cap P_2)$ y por simetría $\lambda(E \cap P_2) = \lambda(E \cap P_1 \cap P_2)$. Así $\lambda(E \cap P_1) = \lambda(E \cap P_2)$. Es similar verificar que $\lambda(E \cap N_1) = \lambda(E \cap N_2)$. $\square$

Con $E = N_1$ en la primera igualdad de la proposición, obtenemos $\lambda(N_1 \setminus N_2) = 0$. Con $E = P_1$ en la segunda igualdad, obtenemos $\lambda(P_1 \setminus P_2) = 0$. Se puede checar que $N_1 \setminus N_2$, $P_1 \setminus P_2$ son de hecho nulos para $\lambda$.

*7.4.* Definición. Las *variaciones positiva y negativa* $\lambda^+, \lambda^-$ para la medida signada $\lambda$ son las medidas $\lambda^+(E) = \lambda(E \cap P)$, $\quad \lambda^-(E) = -\lambda(E \cap N)$. La *variación total* de $\lambda$ es $|\lambda| = \lambda^+ + \lambda^-$. (No dependen de cuál descomposición de Hahn se use.)

$\lambda^+, \lambda^-$ son medidas finitas. Notemos que $\lambda = \lambda^+ - \lambda^- = (\lambda^+ + \rho) - (\lambda^- + \rho)$ para cualquier medida finita $\rho$. No hay otras formas de descomponer $\lambda$ como diferencia de medidas:

*7.5.* Teorema. (de Descomposición de Jordan) Sea $\lambda$ una medida signada en $(X, \mathcal{F})$. Entonces $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ y si $\mu, \nu$ son medidas finitas tales que $\lambda = \mu - \nu$, entonces $\mu(E) \geq \lambda^+(E)$, $\nu(E) \geq \lambda^-(E)$ para todo $E \in \mathcal{F}$.

(Notar que $\rho = \mu - \lambda^+ = \nu - \lambda^-$.)

Demostración. Sabemos $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$. Supóngase que $\lambda = \mu - \nu$.

Entonces

$$\lambda^+(E) = \lambda(E \cap P) = \mu(E \cap P) - \nu(E \cap P) \leq \mu(E \cap P) \leq \mu(E).$$

Similarmente $\lambda^-(E) \leq \nu(E)$. $\square$

*7.6.* Teorema. Sea $f \in L(X, \mathcal{F}, \mu)$ (=integrables) donde $\mu$ es una medida. Definimos la medida signada

$$\lambda(E) = \int_E f \, d\mu.$$

Entonces

$$\lambda^+(E) = \int_E f^+ \, d\mu, \quad \lambda^-(E) = \int_E f^- \, d\mu, \quad |\lambda|(E) = \int_E |f| \, d\mu.$$

Demostración. Pongamos $P = f^{-1}[0, \infty)$, $N = f^{-1}(-\infty, 0)$. Entonces

$$\lambda(E \cap P) = \int_{E \cap P} f \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu \geq 0,$$

$$\lambda(E \cap N) = \int_{E \cap N} f \, d\mu = -\int_E f^- \, d\mu \leq 0$$

por lo que $P$ es positivo, $N$ negativo y dan una descomposición de Hahn. Ahora la última afirmación viene de

$$\lambda^+(E) = \lambda(E \cap P), \quad \lambda^-(E) = -\lambda(E \cap N). \quad \square$$

*7.7.* Ahora abordaremos el Teorema de Radon-Nikodým.

Recordemos que cuando $\mu, \lambda$ son medidas en $(X, \mathcal{F})$, decimos $\lambda \ll \mu$ ($\lambda$ es absolutamente continua con respecto a $\mu$) cuando para $E \in \mathcal{F}$,

$$\mu(E) = 0 \implies \lambda(E) = 0.$$

Para medidas signadas, se escribe $\lambda \ll \mu$ para indicar que las variaciones totales satisfacen $|\lambda| \ll |\mu|$. (Normalmente $\mu$ sería una medida, o sea $|\lambda| \ll \mu$.)

Proposición. Sean $\mu, \lambda$ medidas finitas. Entonces $\lambda \ll \mu \iff$ para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $E \in \mathcal{F}$ con $\mu(E) < \delta$, se tiene $\lambda(E) < \epsilon$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos $\lambda \ll \mu$. Si la condición fuera falsa, habría $\epsilon > 0$ tal que $(\forall\delta)(\exists E)$ $\mu(E) < \delta$, $\lambda(E) \geq \epsilon$.

Luego (pensando en $\delta = 2^{-n}$) tomamos $E_n$, $n = 1, 2, \ldots$, de manera que

$$\mu(E_n) < 2^{-n}, \quad \lambda(E_n) \geq \epsilon.$$

Definamos

$$F_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k,$$

luego $\mu(F_n) < 2^{-(n-1)}$, $\lambda(F_n) \geq \lambda(E_n) \geq \epsilon$.
Para estas medidas finitas, el hecho $F_n \supseteq F_{n+1}$ nos dice

$$\mu\left(\bigcap_1^{\infty} F_n\right) = \lim \mu(F_n) = 0,$$

$$\lambda\left(\bigcap_1^{\infty} F_n\right) = \lim \lambda(F_n) \geq \epsilon.$$

Pero la continuidad absoluta dice $\lambda\left(\bigcap_1^{\infty} F_n\right) = 0$, que es una contradicción.
Por lo tanto se verifica la condición.
($\Leftarrow$) Supongamos la condición. Sea $\mu(E) = 0$.
Sea $\epsilon > 0$ arbitrario, y tomemos $\delta$ como nos dice la condición.
Entonces $\mu(E) < \delta$, luego $\lambda(E) < \epsilon$.
Por ser $\epsilon$ arbitrario, tenemos $\lambda(E)$=0,
y como $E \in \mathcal{F}$ era arbitrario, $\lambda \ll \mu$. $\square$

*7.8.* Definición. En cualquier espacio de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$, cuando la medida signada $\lambda$ satisface $\lambda(E) = \int_E f \, d\mu$ para todo $E \in \mathcal{F}$, decimos que $f$ es una *derivada de Radon-Nikodým* de $\lambda$ con respecto a $\mu$, y escribimos

$$f = \frac{d\lambda}{d\mu}.$$

Así

$$\lambda(E) = \int_E \frac{d\lambda}{d\mu} \, d\mu.$$

(Otra forma de expresarlo es que $\lambda$ es la integral indefinida de su propia derivada de Radon-Nikodým.)

Ejemplo. Sea $\mu$ la medida de conteo en $\mathbb{R}$. Sea $\lambda(E)$ = número de enteros en $E$. Entonces tenemos la derivada de Radon-Nikodým $d\lambda/d\mu = \chi_{\mathbb{Z}}$. (Es un ejemplo donde $\mu$ no es $\sigma$-finita.)

*7.9.* Más adelante estudiaremos una derivada de la forma

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\lambda(B_\epsilon(x))}{\mu(B_\epsilon(x))}$$

donde $B_\epsilon(x)$ es una bola en $\mathbb{R}^n$. Pero en espacios generales no se pueden formar "bolas". Sin embargo se puede hacer algo que es en algún sentido análogo, con la descomposición de Hahn:

Pongamos $\mu$, $\lambda$ medidas finitas en $(X,\mathcal{F})$. Consideremos $a\in\mathbb{R}$.
La medida signada $\lambda - a\mu$ tiene una descomposición de Hahn $P(a), N(a)$.
Así $\lambda - a\mu \geq 0$ para subconjuntos de $P(a)$, y
$\lambda - a\mu \leq 0$ para subconjuntos de $N(a)$.
(Para $a \leq 0$ no es interesante: $P(a) = X$, $N(a) = \varnothing$.)
Entonces cuando $a < b$ tenemos $\underline{a\mu \leq \lambda \leq b\mu \text{ en } P(a)\cap N(b)}$.
Fijemos $\epsilon > 0$ y escribamos

$$A_k = P(k\epsilon)\cap N((k+1)\epsilon),$$

así

$$k\epsilon\,\mu \leq \lambda \leq (k+1)\epsilon\,\mu \text{ en } A_k.$$

(Esto se parece a una derivada: "$k\epsilon \leq \lambda(E)/\mu(E) \leq (k+1)\epsilon$".)

Notemos que $A_0 = P(0)\cap N(1\cdot\epsilon) = N(\epsilon)$. Pongamos

$$A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$$

y luego

$$\begin{aligned} B &= X\setminus A \\ &= X\setminus \bigcup_0^\infty P(k\epsilon)\cap N((k+1)\epsilon) \\ &= \bigcap_0^\infty P((k+1)\epsilon)\cup N(k\epsilon). \end{aligned}$$

Notemos que $B\subseteq P(\epsilon)$ porque $N(0)=\varnothing$. Luego $B\subseteq P(2\epsilon)$ porque $P(\epsilon)\cap N(\epsilon)=\varnothing$, etc. Así $B\subseteq P(k\epsilon)$ para todo $k\geq 1$. Por lo tanto $\lambda(B) - k\epsilon\mu(B) \geq 0$, y como $k$ puede ser arbitrariamente grande, $\mu(B) = 0$. (Recordemos $\lambda(B) < \infty$.) Además $A_k\cap A_l = \varnothing$ para $k\neq l$, porque los $P(a)$ decrecen con $a$. Resumimos lo anterior:

<u>Lema.</u> Dadas medidas finitas $\mu$,$\lambda$ en $(X, \mathcal{F})$, y dado $\epsilon > 0$, hay una partición por conjuntos medibles

$$X = B \cup A_0 \cup A_1 \cup \ldots$$

tal que $\mu(B) = 0$ y tal que para todo $E \subseteq A_k$, $E \in \mathcal{F}$, se tiene

$$k\epsilon\, \mu(E) \leq \lambda(E) \leq (k+1)\epsilon\, \mu(E).$$

Con esta partición podemos formar una función $f$ definida en $A$, por $f(x) = k\epsilon$ para $x \in A_k$. Para $E \subseteq A$, tenemos

$$\int_E f\, d\mu = \sum_k (k\epsilon)\mu(E \cap A_k) \approx \sum_k (k\epsilon)\frac{\lambda(E \cap A_k)}{k\epsilon} = \lambda(E).$$

Pero en $B$ no tenemos control sobre $\lambda$. Por ello agregamos una hipótesis, de que $\lambda \ll \mu$, lo cual da $\underline{\lambda = 0 \text{ en } B}$.
Así podríamos definir $f = 0$ en $B$ para que $\lambda$ sea la integral indefinida de $f$.

*7.10.* <u>Teorema.</u> (Radon-Nikodým) Sean $\lambda, \mu$ medidas $\sigma$-finitas en $(X, \mathcal{F})$. Supóngase que $\lambda \ll \mu$. Entonces existe una $f$ medible, $f \geq 0$ tal que

$$\lambda(E) = \int_E f\, d\mu$$

para todo $E \in \mathcal{F}$. Esta derivada de Radon-Nikodým $f = d\lambda/d\mu$ es única en el sentido de que si $\lambda$ es la integral indefinida de $f_1$ también, entonces $f_1 = f$ $\mu$-c.t.p.

<u>Demostración.</u> Primero supongamos que $\lambda, \mu$ son finitas.
Para cada $\epsilon > 0$ apliquemos el Lema para obtener $B, A_0, A_1, \ldots$ y definamos

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} k\epsilon, & x \in A_k, \\ 0, & x \in B. \end{cases}$$

Cualquier $E \in \mathcal{F}$ puede descomponerse $E = (E \cap B) \cup (E \cap A_0) \cup (E \cap A_1) \cup \ldots$ y los pedazos individuales dan integrales

$$\begin{aligned} \int_{E\cap A_k} f_\epsilon\, d\mu &= \int_{E\cap A_k} k\epsilon\, d\mu \\ &= k\epsilon\, \mu(E \cap A_k) \;\leq\; \underline{\lambda(E \cap A_k)} \;\leq\; (k+1)\epsilon\, \mu(E \cap A_k) \\ &= \int_{E\cap A_k} (k+1)\epsilon\, d\mu \;=\; \int_{E\cap A_k} (f_\epsilon + \epsilon)\, d\mu \\ &= \int_{E\cap A_k} f_\epsilon\, d\mu \;+\; \epsilon\mu(E \cap A_k) \end{aligned}$$

y $\int_{E\cap B} f_\epsilon \, d\mu = 0$. Combinando los pedazos,

$$\int_E f_\epsilon \, d\mu \leq \lambda(E) \leq \int_E f_\epsilon \, d\mu + \epsilon\mu(X). \qquad (*)$$

Aplicaremos esto con $\epsilon(n) = 2^{-n}$. Para $m \geq n$,

$$\int_E f_{\epsilon(n)} \, d\mu \overset{n}{\leq} \lambda(E) \overset{m}{\leq} \int_E f_{\epsilon(m)} \, d\mu + 2^{-m}\mu(X) \leq \int_E f_{\epsilon(m)} \, d\mu + \underline{2^{-n}}\mu(X)$$

y

$$\int_E f_{\epsilon(m)} \, d\mu \overset{m}{\leq} \lambda(E) \overset{n}{\leq} \int_E f_{\epsilon(n)} \, d\mu + \underline{2^{-n}}\mu(X)$$

por lo que

$$\left| \int_E (f_{\epsilon(n)} - f_{\epsilon(m)}) \, d\mu \right| \leq 2^{-n}\mu(X).$$

Veamos por un momento el caso particular $E = X$.
Pongamos $X^+ = \{x \in X\colon \ f_{\epsilon(n)}(x) - f_{\epsilon(m)}(x) \geq 0\}$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{X^+} |f_{\epsilon(n)} - f_{\epsilon(m)}| \, d\mu &= \int_{X^+} (f_{\epsilon(n)} - f_{\epsilon(m)}) \, d\mu \\ &= \left| \int_{X^+} (f_{\epsilon(n)} - f_{\epsilon(m)} \, d\mu \right| \leq 2^{-n}\mu(X). \end{aligned}$$

Se tiene una desigualdad similar para $X^- = \{x \in X\colon \ f_{\epsilon(n)}(x) - f_{\epsilon(m)}(x) \leq 0\}$, y tenemos $X = X^+ \cup X^-$. Entonces

$$\int_X |f_{\epsilon(n)} - f_{\epsilon(m)}| \, d\mu \leq \frac{2}{2^n}\mu(X) = \frac{1}{2^{n-1}}\mu(X).$$

Esto implica que la sucesión $\{f_{\epsilon(n)}\}$ es de Cauchy en $L_1(X, \mu)$. Por lo tanto converge en $L_1$ a un límite $f \in L_1$. Puesto que $f_{\epsilon(n)} \geq 0$ tenemos $f \geq 0$ $\mu$-c.t.p. y así podemos suponer que $f \geq 0$.
Ahora sabemos que para cualquier $E \in \mathcal{F}$,

$$\left| \int_E f_{\epsilon(n)} \, d\mu - \int_E f \, d\mu \right| \leq \int_E |f_{\epsilon(n)} - f| \, d\mu \leq \int |f_{\epsilon(n)} - f| \, d\mu.$$

Por esto y la desigualdad (*) tenemos

$$\lambda(E) = \lim_n \int_E f_{\epsilon(n)} \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

Esto demuestra la existencia de la derivada de R-N cuando las medidas son finitas.
Unicidad: Ejercicio.

Ahora volvemos a considerar que $\lambda, \mu$ son $\sigma$-finitas.
Se puede descomponer $X = \bigcup_j C_j = \bigcup_k D_k$ con $\lambda(C_j), \mu(D_k) < \infty$.
Ordenando los $C_j \cap D_k$ (contable) obtenemos $X = \bigcup_1^\infty X_n$ con $\lambda(X_n), \mu(X_n) < \infty$. Podemos suponer $X_n \subseteq X_{n+1}$.
Por lo que probamos para el caso finito, para cada $n$ hay una $h_n$ medible tal que $h_n(x) = 0$ cuando $x \in X \setminus X_n$, y tal que para cada $E \subseteq X_n$, $E \in \mathcal{F}$ se tiene

$$\lambda(E) = \int_E h_n \, d\mu.$$

Tomemos $m \geq n$, luego la condición $E \subseteq X_n \subseteq X_m$ nos da

$$\int_E h_n \, d\mu = \int_E h_m \, d\mu.$$

Por el hecho de la unicidad en $(X_m, \mu|_{X_m})$, sabemos que $h_m, h_n$ concuerdan $\mu$-c.t.p. en $X_n$. Para evitar manejar las discrepancias de medida cero, definimos

$$f_n = \sup_{1 \leq j \leq n} h_j.$$

Es una sucesión creciente; sea $f = \lim f_n$, que es $\mathcal{F}$-medible.
Entonces para $E \subseteq X$, $E \in \mathcal{F}$, tenemos

$$\lambda(E \cap X_n) = \int_E f_n \, d\mu.$$

Ahora

$$\begin{aligned} \lambda(E) &= \lambda\Big(\bigcup (E \cap X_n)\Big) = \lim \lambda(E \cap X_n) = \lim \int_E f_n \, d\mu \\ &\overset{\substack{\text{Conv.} \\ \text{Mon.}}}{=} \int_E f \, d\mu \end{aligned}$$

Así $f$ es derivada de R-N de $\lambda$ con respecto a $\mu$.
Unicidad: ejercicio. □

<u>Nota.</u> También es posible construir la derivada de R-N con el Teorema de Representación de Riesz (omitimos).

*7.11.* Finalmente veamos la descomposición de Lebesgue de una medida. Sean $(X, \mathcal{F}, \lambda)$, $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacios con medida.

Definición. Las medidas $\lambda, \mu$ son mutuamente singulares, "$\lambda \perp \mu$", si hay $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $X = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$,

$$\mu(A) = \lambda(B) = 0.$$

Teorema. (de Descomposición de Lebesgue) Sean $\lambda, \mu$ medidas $\sigma$-finitas. Entonces existe una única descomposición de Lebesgue de $\lambda$ con respecto a $\mu$, eso es, $\lambda = \lambda_{\text{abs}} + \lambda_{\text{sing}}$, con

$$\lambda_{\text{sing}} \perp \mu, \quad \lambda_{\text{abs}} \ll \mu.$$

Demostración. Unicidad. Sea $X = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$, $\lambda_{\text{abs}} + \lambda_{\text{sing}} = \lambda$,

$$\mu(A) = \lambda_{\text{sing}}(B) = 0, \quad \lambda_{\text{abs}} \ll \mu.$$

Observemos que $\lambda_{\text{sing}}(E \cap B) = 0 = \lambda_{\text{abs}}(E \cap A)$, luego

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{sing}}(E) &= \lambda_{\text{sing}}(E \cap A) + \lambda_{\text{sing}}(E \cap B) = \lambda(E \cap A), \\ \lambda_{\text{abs}}(E) &= \lambda_{\text{abs}}(E \cap A) + \lambda_{\text{abs}}(E \cap B) = \lambda(E \cap B). \end{aligned}$$

Esto nos dice que conocemos $\lambda_{\text{abs}}$, $\lambda_{\text{sing}}$ cuando conocemos $A, B$ en la definición de "$\lambda_{\text{sing}} \perp \mu$".

Supongamos que $X = A' \cup B'$, $A' \cap B' = \varnothing$, $\lambda'_{\text{abs}} + \lambda'_{\text{sing}} = \lambda$,

$$\mu(A') = \lambda'_{\text{sing}}(B') = 0, \quad \lambda'_{\text{abs}} \ll \mu.$$

Entonces podemos formar

$$A^* = A \cup A', \quad B^* = B \cap B'$$

y tenemos $X = A^* \cup B^*$, $A^* \cap B^* = \varnothing$. Además $\mu(A^*) = 0$, y como antes

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{sing}}(E) &= \lambda_{\text{sing}}(E \cap A^*) + \lambda_{\text{sing}}(E \cap B^*) = \lambda(E \cap A^*), \\ \lambda'_{\text{sing}}(E) &= \lambda'_{\text{sing}}(E \cap A^*) + \lambda'_{\text{sing}}(E \cap B^*) = \lambda(E \cap A^*), \end{aligned}$$

por lo que $\lambda'_{\text{sing}} = \lambda_{\text{sing}}$ y luego $\lambda_{\text{abs}} = \lambda_{\text{abs}}$.

Existencia. La medida $\nu = \lambda + \mu$ es $\sigma$-finita. Por el T. de Radon-Nikodým, tenemos $g = d\mu/d\nu$, es decir,

$$\mu(E) = \int_E g \, d\nu$$

para $E \in \mathcal{F}$. Definamos

$$A = \{x\colon\ g(x) = 0\}, \quad B = \{x\colon\ g(x) > 0\}.$$

Sabemos que hay que tomar

$$\lambda_{\text{sing}}(E) = \lambda(E \cap A), \quad \lambda_{\text{abs}}(E) = \lambda(E \cap B).$$

Así $\lambda_{\text{abs}} + \lambda_{\text{sing}} = \lambda$, $X = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$.

Como $\mu(A) = \int_A g\,d\nu = 0$, y $\lambda_{\text{abs}}(B) = \lambda(B \cap A) = \lambda(\varnothing) = 0$, tenemos $\lambda_{\text{sing}} \perp \mu$.

Supóngase que $\mu(E) = 0$. Entonces

$$0 = \int_E g\,d\nu = \int_{E\cap B} g\,d\nu + \int_{E\setminus B} g\,d\nu = \int_{E\cap B} g\,d\nu.$$

Esto implica que $\nu(E\cap B) = 0$ porque todos los conjuntos en la unión

$$E \cap B = \bigcup_n \{x \in E \cup B\colon\ g(x) \geq \frac{1}{n}\}$$

tienen $\nu$-medida cero. Luego

$$\lambda_{\text{abs}}(E) = \lambda(E \cap B) \leq \nu(E \cap B) = 0$$

lo cual da la conclusión de que $\lambda_{\text{abs}} \ll \mu$. $\square$

ANÁLISIS REAL #8

# TEOREMAS DE REPRESENTACION DE RIESZ

Definición. Una funcional lineal en un espacio vectorial $V$ es una función lineal $G\colon V \to \mathbb{R}$. Cuando $V$ es espacio vectoral normado, $G$ se dice acotada si hay una constante $M$ tal que $|G(v)| \le M\|v\|$ para todo $v \in V$. La mínima tal constante $M$ es la norma $\|G\|$ de $G$:

$$\|G\| = \sup\{|G(v)|\colon\ v \in V,\ \|v\| \le 1\}.$$

El espacio dual de $V$ es

$$V^* = \{\text{funcionales lineales acotadas en } V\}$$

que es espacio vectorial con esta norma.

Ejemplo. $V = L_p(X, \mathcal{F}, \mu)$, $1/p + 1/q = 1$. Fijemos $g \in L_q(X, \mathcal{F}, \mu)$ y definamos $G = G_g\colon L_p \to \mathbb{R}$ por

$$G(f) = \int f g \, d\mu \text{ para } f \in L_p.$$

Por la desigualdad de Hölder, $|G(f)| \le \|f\|_p \|g\|_q$ por lo que $G$ es acotada con $\|G\| \le \|g\|_q$.
De hecho $\|G\| = \|g\|_q$. Para verificarlo: cuando $g \ge 0$, tomamos $f = g^{q-1}$ y verificamos que $f \in L_p$, $\|f\|_p^p = \int f^p \, d\mu = \int g^q \, d\mu = \|g\|_q^q$, luego $G(f) = \|g\|_q \|f\|_p$. Para $g$ general se pone $|\cdot|$ en las posiciones adecuadas. (Considerar $|g|^{q-2} g$.)

(Recordemos que $G$ está definida en clases de equivalencia de igualdad c.t.p. Hemos escrito $G(f)$ para la imagen de la clase de equivalencia de $f$.)

Se puede decir que en este ejemplo, la funcional $G$ es "representada" por integración con la función $g$. Veremos que toda funcional es representada por una función. La identificación de funcionales con clases de equivalencia de funciones puede expresarse como $L_q \cong (L_p)^*$.

Definición. Una funcional lineal $G\colon L_p \to \mathbb{R}$ es positiva si $f \ge 0 \implies G(f) \ge 0$.

Lema. Sea $G$ una funcional lineal acotada en $L_p$. Entonces $G = G^+ - G^-$ donde $G^+$, $G^-$ son funcionales lineales acotadas positivas en $L_p$.

Demostración. Primero consideremos $f \geq 0$. Definamos

$$G^+(f) = \sup\{G(h)\colon\ h \in L_p,\ 0 \leq h \leq f\}.$$

Claramente $G^+$ es por lo menos "semilineal": si $c \geq 0$, $f \geq 0$ entonces $G^+(cf) = cG^+(f)$, y si $f_1 \geq 0$, $f_2 \geq 0$ entonces

$$G^+(f_1) + G^+(f_2) \leq G^+(f_1 + f_2) \qquad (*)$$

porque cuando $0 \leq h_1 \leq f_1$, $0 \leq h_2 \leq f_2$, se tiene
$G(h_1) + G(h_2) = G(h_1 + h_2) \leq G^+(f_1 + f_2)$,
y al tomar el sup sobre $f_1, f_2$ se da (*).
Sea

$$0 \leq h \leq f_1 + f_2$$

con $f_1, f_2 \geq 0$, y consideremos

$$h_1 = \sup(h - f_2, 0), \quad h_2 = \inf(f_2, h),$$

que satisfacen $h_1 + h_2 = h$, $0 \leq h_1 \leq f_1$, $0 \leq h_2 \leq f_2$. De esto se ve

$$G(h) = G(h_1) + G(h_2) \leq G^+(f_1) + G^+(f_2).$$

Como $h \in L_p$ es arbitraria debajo de $f_1 + f_2$, tenemos

$$G^+(f_1 + f_2) \leq G^+(f_1) + G^+(f_2). \qquad (**)$$

Junto con (*) nos da $G^+(f_1+f_2) = G^+(f_1)+G^+(f_2)$ cuando $f_1, f_2 \geq 0$. Hemos establecido que $G^+$ actúa linealmente en $f \geq 0$. Para $f \in L_p$ en general, definimos

$$G^+(f) = G^+(f^+) - G^+(f^-).$$

Finalmente, definamos $G^- = G^+ - G$.
De lo que se ha establecido, es directo verificar que $G^+$, $G^-$ son funcionales lineales acotadas positivas en $L_p$. $\square$

Teorema. (Representación de Riesz (a)) Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio con medida $\sigma$-finito, y sea $G\colon L_1 \to \mathbb{R}$ una funcional lineal acotada. Entonces existe $g \in L_\infty$ tal que

$$(\forall f \in L_1)\ G(f) = \int fg\, d\mu.$$

Ademas, $\|G\| = \|g\|_\infty$. Si $G$ es positiva, entonces $g \geq 0$ c.t.p.

Teorema. (Representación de Riesz (b)) Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ cualquier espacio con medida, $1 < p < \infty$, y sea $G\colon L_p \to \mathbb{R}$ una funcional lineal acotada. Entonces existe $g \in L_q$ $(1/p + 1/q = 1)$ tal que

$$(\forall f \in L_p)\ G(f) = \int fg\, d\mu.$$

Ademas, $\|G\| = \|g\|_q$. Si $G$ es positiva, entonces $g \geq 0$ c.t.p.

Demostración. (a) Primero supongamos que $\mu(X) < \infty$ y que $G$ es positiva. Para cada $E \in \mathcal{F}$, notamos que $\chi_E \in L_1$ y pongamos $\lambda(E) = G(\chi_E)$.
Así $\lambda(\varnothing) = 0$. Como $G$ es positiva, $\lambda(E) \geq 0$.

Dados $E_n \subseteq E_{n+1}$, $E = \bigcup E_n$, tenemos $\chi_{E_n} \to \chi_E$ puntualmente, y trivialmente $|\chi_{E_n}| \leq 1$.
Sabemos que para cualquier sucesión uniformemente acotada $|f_n| \leq K$, $f_n \in L_p$, que la convergencia puntual implica convergencia en $L_p$. Por lo tanto

$$\chi_{E_n} \to \chi_E \text{ in } L_1.$$

Dado que $\chi_E - \chi_{E_n} \geq 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lambda(E) - \lambda(E_n) = G(\chi_E) - G(\chi_{E_n}) = G(\chi_E - \chi_{E_n}) \\ &\leq \|G\|\, \|\chi_E - \chi_{E_n}\|_1 \to 0 \end{aligned}$$

por lo que $\lambda(E_n) \to \lambda(E)$ cuando $n \to \infty$. Esto establece que $\lambda$ es una medida.

Para $E \in \mathcal{F}$ se tiene

$$\mu(E) = 0 \implies \lambda(E) = G(\chi_E) = G(0) = 0$$

porque $\chi_E = 0$ c.t.p., es decir, $\chi_E$ y $0$ definen el mismo elemento de $L_1$. Esto establece que $\lambda \ll \mu$. Por el teorema de Radon-Nikodým, hay $g \geq 0$ tal que

$$G(\chi_E) = \lambda(E) \overset{\text{R}-\text{N}}{=} \int_E g\, d\mu = \int \chi_E\, g\, d\mu$$

para todo $E \in \mathcal{F}$. Como $G$ es lineal y como toda función simple-finita $\varphi$ es combinación lineal de funciones $\chi_E$, tenemos

$$G(\varphi) = \int \varphi g \, d\mu$$

para toda $\varphi$ simple.

Sea $f \geq 0$, $f \in L_1$. Tomemos $0 \leq \varphi_n \leq f$, $\varphi_n \uparrow f$, $\int \varphi_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$. Luego por el Teorema de Lebesgue de Convergencia Dominada tenemos

$$\|\varphi_n - f\|_1 = \int |\varphi_n - f| \, d\mu \to 0$$

(dominar por $2f$). Por lo tanto

$$|G(\varphi_n) - G(f)| = |G(\varphi_n - f)| \leq \|G\| \, \|\varphi_n - f\|_1 \to 0$$

por lo que $G(\varphi_n) \to G(f)$.
Ahora por el Teorema de Lebesgue de Convergencia Monótona,

$$G(f) = \lim_n G(\varphi_n) = \lim \int \varphi_n g \, d\mu \overset{\text{C.M.}}{=} \int \lim \varphi_n g \, d\mu = \int f g \, d\mu.$$

Esta fórmula dependió de $f \geq 0$. Para $f \in L_1$ en general, nuevamente

$$\begin{aligned} G(f) &= G(f^+ - f^-) = G(f^+) - G(f^-) \\ &= \int f^+ g \, d\mu - \int f^- g \, d\mu = \int f g \, d\mu. \end{aligned}$$

Esto da la representación integral para $G$ cuando $X$ es de medida finita, y $G$ es positiva.

Ahora consideremos $X$ $\sigma$-finito, y todavía $G$ positiva. Tenemos $X = \bigcup X_n$ con $\mu(X_n) < \infty$, $X_n \subseteq X_{n+1}$.
Ya sabemos que hay $g_n \geq 0$, que se anula en $X \setminus X_n$, tal que

$$G(f) = \int f g_n \, d\mu \text{ para todo } f \in L_1 \text{ que se anula afuera de } X_n.$$

Sea $m \leq n$. Consideremos cualquier $f$ medible, que se anule afuera de $X_m$. Entonces $f$ se anula afuera de $X_n$, luego

$$\int f g_n \, d\mu = G(f) = \int f g_m \, d\mu,$$

por lo que $\int f(g_m - g_n)\, d\mu = 0$.
Esto establece que $g_m|_{X_m} = g_n|_{X_m}$ c.t.p. Por esto las $g_n$ se extienden a formar una sola función $g\colon X \to \mathbb{R}$ que representa la funcional positiva $G$.

Finalmente veamos el caso general, y escribimos $G = G^+ - G^-$ como diferencia de funcionales positivas, que ya sabemos son representadas por funciones $g^+, g^-$. Definamos $g = g^+ - g^-$, y tenemos

$$G(f) = G^+(f) - G^-(f) = \int f g^+\, d\mu - \int f g^-\, d\mu = \int f g\, d\mu$$

para todo $f \in L_1$.
Tenemos que mostrar que $g \in L_\infty$. Si $g \geq K$ sobre el conjunto $E \in \mathcal{F}$, podremos suponer por un momento que $\mu(E) < \infty$, usando $E \cap X_n$ en lugar de $E$. Tomamos $f = \chi_E \in L_1$, luego $\|f\|_1 = \mu(E)$, además

$$|G(f)| = \left| \int f g\, d\mu \right| = \left| \int_E g\, d\mu \right| \geq K\mu(E) = K\|f\|_1.$$

Hemos probado que si $K > \|G\|$, entonces

$$(\forall E)\ g \geq K \text{ sobre } E \implies \mu(E) = 0.$$

(Recordemos que fue verificado para $E \cap X_n$ en lugar de $E$, y notemos que $E$ será unión contable de pedazos nulos.) Esto nos dice que $\|g\|_\infty \leq \|G\|$.
Por la representación integral tenemos $\|G\| \leq \|g\|$, luego $\|G\| = \|g\|$.
$\square$

La demostración de la versión (b) es similar.

ANÁLISIS REAL #9

## MEDIDAS PRODUCTO — I

(Vamos a definir un "producto" $\mu \times \nu$ de dos medidas, que será protagonista del teorema de Fubini. Cuando $A$ es $\mu$-medible y $B$ es $\nu$-medible, es natural pedir $(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\,\nu(B)$. Pero los conjuntos medibles en un producto $X \times Y$ no son todos de la forma $A \times B$, ni siquiera son uniones contables $\bigcup(A_i \times B_i)$. Por ello será conveniente definir $\mu \times \nu$ primero en uniones finitas, que forman un álgebra, luego extender la noción a todos los medibles.)

## *9.1.* REPASO DE GENERACIÓN DE MEDIDAS

Con $\mathcal{F}_0$ un álgebra de subconjuntos de $X$, "$\mu$ una medida en $(X, \mathcal{F}_0)$" significa "$\mu$ contablemente aditiva aplicándose cuando $\bigcup_1^\infty E_n \in \mathcal{F}_0$".
Se extiende $\mathcal{F}_0$ a una $\sigma$-álgebra $\mathcal{F}$ de manera natural:
Primero se considera $\mu^*$ = medida exterior generada por $\mu$,

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) \colon\ A \subseteq \bigcup_1^{\infty} E_j\ ,\ E_j \in \mathcal{F}_0 \right\}$$

y luego se considera la familia

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0^* &= \{\text{conjuntos } \mu^*\text{-medibles}\} \\ &= \{E\colon\ (\forall A \subseteq X)\ \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)\}. \end{aligned}$$

Dado esto se demuestra que $\mu^* | \mathcal{F}_0 = \mu$, y

Teorema de Extensión de Carathéodory. $\mathcal{F}_0^*$ es una $\sigma$-álgebra y $(X, \mathcal{F}_0^*, \mu^* | \mathcal{F}_0^*)$ es un espacio con medida.

Teorema de Extensión de Hahn. Si $\mu$ es una medida $\sigma$-finita en el álgebra $\mathcal{F}_0$, entonces $\mu^* | \mathcal{F}_0^*$ es la única extensión de $\mu$ a una medida en $\mathcal{F}_0^*$.

Ejemplo. 1. (Medida de Lebesgue). $\mathcal{F}_0 =$

$$\{\text{uniones finitas disjuntas de } (a, b],\ (-\infty, b],\ (a, \infty),\ (-\infty, \infty)\},$$

$$l\left(\bigcup (a_i, b_i]\right) = \sum (b_i - a_i).$$

El Teorema de Carathéodory da $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_0^*, l^*)$ con
$\mathcal{F}_0^*$ ={conjuntos Lebesgue-medibles}, $l^*$=*medida de Lebesgue.*
Es única porque $l$ es $\sigma$-finita.

Ejemplo. 2. (Medida de Lebesgue-Stieltjes). Sea $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona creciente: $x \leq y \implies g(x) \leq g(y)$; y continua por la derecha:

$$(\forall c)\ g(c) = \lim_{h \downarrow 0} g(c + h).$$

Se escribirá $g(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} g(x)$, $g(\infty) = \lim_{x\to\infty} g(x)$.
Definamos para $a < b$

$$\mu_g(\ (a,b]\ ) = g(b) - g(a)$$

y extendamos a $\mu_g$ a la misma álgebra $\mathcal{F}_0$ del ejemplo anterior.
Por el Teorema de Carathéodory se extiende $\mu_g$ a una $\sigma$-álgebra que puede llamarse $\mathcal{F}_g$. Esta $\mu_g$ es la *medida de Lebesgue-Stieltjes* correspondiente a $g$. Dado que $\mathcal{F}_g$ contiene a los borelianos, tenemos la *medida de Borel-Stieltjes* $(X, \mathcal{B}, \mu_g|_{\mathcal{B}})$.

Ejemplo. 3. (Espacio dual a $C([0,1])$.)

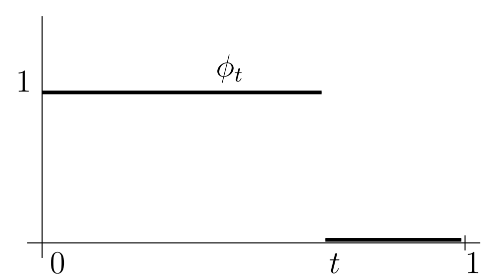
Teorema. (Representación de Riesz (c).) Sea $G$ una funcional lineal acotada positiva en $C(X) = C([0,1])$ con $\|\ \|_\infty$. Entonces existe una medida $\gamma$ en los borelianos de $[0,1]$ tal que

$$(\forall f \in C([0,1])) \quad G(f) = \int_{[0,1]} f\, d\gamma.$$

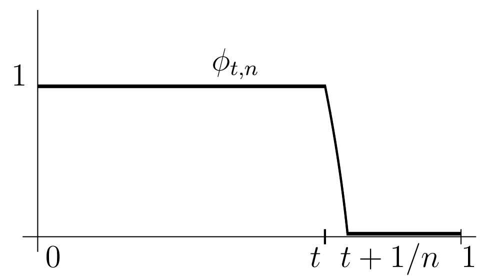
Además, $\|G\| = \gamma([0,1])$.

(Un bosquejo de la demostración, lo suficiente para ver dónde entra el concepto de la extensión de las medidas:)

Un enfoque podría ser de usar el Teorema de Hahn-Banach (que no es de este curso) para extender $G$ a una funcional en todo $L_\infty([0,1])$ porque $C([0,1]) \subseteq L_\infty([0,1])$ es un subespacio cerrado. Esto permitiría aplicar $G$ a la función $\phi_t = \chi_{[0,t]}$ y luego definir $g(t) = G(\chi_{[0,t]})$ y considerar la medida de Lebesgue-Stieltjes $\gamma$ para $g$.




Si no conocemos el Teorema de Hahn-Banach, entonces utilizaremos una aproximación continua $\phi_{t,n}$ y definiremos $g(t) = \lim_{n\to\infty} G(\phi_{t,n})$.




El límite existe y es $\geq 0$ porque $0 \leq \phi_{t,n+1} \leq \phi_{t,n}$, que da $0 \leq G(\phi_{t,n+1}) \leq G(\phi_{t,n})$.

Luego hay que checar

(1) $g(t)$ es creciente y continua por la derecha, con lo que definimos $\gamma = \mu_g$ (L-Stieltjes), y luego

(2) $(\forall f \in C([0,1])\ G(f) = \int f\, d\gamma$.

*9.2.* MEDIDAS PRODUCTO.

Trabajaremos primero con productos en álgebras, y después en $\sigma$-algebras.

Sean $(X, \mathcal{F})$, $(Y, \mathcal{G})$ espacios medibles. Un rectángulo en $X \times Y$ es $A \times B$ donde $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Es rectángulo medible cuando $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{G}$. Pongamos $Z = X \times Y$. Definamos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \{\text{uniones finitas de rectángulos medibles}\} \\ &= \{\bigcup_{j=1}^{N} (A_j \times B_j)\colon\ A_j \in \mathcal{F},\ B_j \in \mathcal{G},\ N \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Lema. Todo elemento de $\mathcal{H}_0$ es una unión finita disjunta de rectángulos medibles.

Demostración. Fijemos $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, $B_1, \ldots, B_n \in G$. Existen $2^n$ $n$-adas $p = (p_1, \ldots, p_n)$ con $p_j \in \{0, 1\}$. Para cada $p$ escribamos

$$\begin{aligned} A^{(p)} &= \bigcap_{p_j=1} A_j \setminus \bigcup_{p_j=0} A_j, \\ B^{(q)} &= \bigcap_{q_j=1} B_j \setminus \bigcup_{q_j=0} B_j. \end{aligned}$$

Notemos que $A^{(p)} \cap A^{(p')} = \varnothing$ cuando $p \neq p'$,
así $(A^{(p)} \times B^{(q)}) \cap (A^{(p')} \times B^{(q')}) = \varnothing$ cuando $p \neq p'$ ó $q \neq q'$.
(Hay $2^n \times 2^n$ combinaciones de $p, q$.) Para cualquier $x \in X$ podemos definir

$$p_j(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_j, \\ 0, & x \notin A_j \end{cases}$$

$$p(x) = (p_1(x), \ldots, p_n(x)),$$

y por definición tenemos $x \in A^{(p(x))} \neq \varnothing$. De manera similar obtenemos $y \in B^{(q(y))}$ para $y \in Y$. Por lo tanto el producto $Z$ es la unión disjunta

$$X \times Y = \bigcup_{p,q} (A^{(p)} \times B^{(q)}).$$

Si $(x_0, y_0) \in A^{(p)} \times B^{(q)}$ a la vez que $(x_0, y_0) \in \bigcup_1^n A_j \times B_j$, entonces para cualquier $(x, y) \in X \times Y$,

$$\begin{aligned} (x,y) \in A^{(p)} \times B^{(q)} \quad &\Longleftrightarrow \quad p(x) = p(x_0),\ q(y) = q(y_0) \\ &\Longrightarrow \quad (x,y) \in \bigcup_1^n (A_j \times B_j). \end{aligned}$$

Esto demuestra que *para todo* $(p, q)$,
*o bien* $A^{(p)} \times B^{(q)}$ *está contenido en* $A_j \times B_j$,
*o bien es disjunto de* $A_j \times B_j$.
Pongamos $I = \left\{ (p,q)\colon\ A^{(p)} \times B^{(q)} \subseteq \bigcup_1^n (A_j \times B_j) \right\}$. Entonces

$$\bigcup_{j=1}^n A_j \times B_j = \bigcup_{(p,q) \in I} A^{(p)} \times B^{(q)}.$$

A la izquierda tenemos un elemento arbitrario de $\mathcal{H}_0$, y a la derecha una unión finita disjunta de rectángulos medibles. $\square$

Lema. $\mathcal{H}_0$ es un álgebra de subconjuntos de $X \times Y$.

Demostración. Por definición $H_0$ es cerrado bajo uniones finitas. Además

$$(X \times Y) \setminus \bigcup_1^n (A_j \times B_j) = \bigcup_{(p,q) \in I'} (A^{(p)} \times B^{(q)})$$

donde

$$\begin{aligned} I' &= \{(p,q)\} \setminus I \\ &= \{(p,q)\colon\ (A^{(p)} \times B^{(q)}) \cap \bigcup_{1}^{n} (A_j \times B_j) = \varnothing\}. \end{aligned}$$

por lo que $H_0$ es cerrado bajo complementos. $\square$

Definición. La $\sigma$-álgebra producto $\mathcal{H} = \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ es la $\sigma$-álgebra generada por $\mathcal{H}_0$.

(¡ $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ no es el producto cartesiano de $\mathcal{F}$ con $\mathcal{G}$!)

*9.3.* Teorema. (de las Medidas Producto.) Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios con medida. Entonces existe una medida $\pi$ en $(Z, \mathcal{H}) = (X \times Y, \mathcal{F} \times \mathcal{G})$ tal que

$$\pi(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$$

para todos $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{G}$. Si las medidas $\mu, \nu$ son $\sigma$-finitas, entonces la medida producto $\pi = \mu \times \nu$ es única.

Demostración. Sean $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{G}$. Supongamos que

$$A \times B = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \times B_j$$

es una descomposición como unión contable disjunta.
Entonces para cualquier $(x,y) \in X \times Y$,

$$\chi_A(x)\chi_B(y) = \chi_{A\times B}(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{A_j}(x)\chi_{B_j}(y)$$

(notar que hay a lo más un sumando no cero). Entonces para $x$ fijo,

$$\begin{aligned} \chi_A(x)\,\nu(B) &= \int \chi_A(x)\chi_B\,d\nu = \\ \int \left(\sum_{1}^{\infty} \chi_{A_j}(x)\chi_{B_j}\right) d\nu &= \int \left(\lim \sum_{1}^{n} \chi_{A_j}(x)\chi_{B_j}\right) d\nu \\ &\overset{\text{C.Mon.}}{=} \lim \int \sum_{1}^{n} \chi_{A_j}(x)\chi_{B_j}\,d\nu \\ &= \lim \sum_{1}^{n} \int \chi_{A_j}(x)\chi_{B_j}\,d\nu \\ &= \sum_{1}^{\infty} \chi_{A_j}(x)\,\nu(B_j) \end{aligned}$$

lo cual dice

$$\chi_A\,\nu(B) = \sum_1^\infty \chi_{A_j}\nu(B_j).$$

Integremos esto:

$$\int \chi_A\,\nu(B)\,d\mu = \int \left(\sum_1^\infty \chi_{A_j}\,\nu(B_j)\right)\,d\mu \overset{\text{C.Mon.}}{=} \sum_1^\infty \int \chi_{A_j}\,\nu(B_j)\,d\mu,$$

luego

$$\mu(A)\nu(B) = \sum_1^\infty \mu(A_j)\nu(B_j) \qquad (*)$$

cuando $A \times B = \bigcup_1^\infty A_j \times B_j$ es unión disjunta.

Sea $E \in \mathcal{H}_0$. Por un Lema, podemos escribir $E = \bigcup_1^n A_j \times B_j$ como unión disjunta aunque no sea de manera única. Queremos definir

$$\pi_0(E) = \sum_1^n \mu(A_j)\,\nu(B_j).$$

Si al mismo tiempo $E = \bigcup_1^{n'} A_i' \times B_i'$, entonces existe una subdivisión común

$$E = \bigcup_1^{n''} A_k'' \times B_k''$$

(tomar los $A_k''$ de la forma $C^{(p)}$ donde se basa en intersecciones $A_j \cap A_i'$, $B_j \cap B_i'$). Entonces cada $A_j \times B_j$ es una unión de algunos de los $A_k'' \times B_k''$, y aplicando $(*)$ (versión finita) y sumando obtenemos

$$\sum_1^n \mu(A_j)\,\nu(B_j) = \sum_1^{n''} \mu(A_k'')\,\nu(B_k'') = \sum_1^{n'} \mu(A_i')\,\nu(B_i').$$

Por esto $\pi_0$ está bien definida.

Ahora reescribimos $(*)$ como

$$\pi_0(A \times B) = \sum_1^\infty \pi_0(A_j \times B_j). \qquad (*)$$

Hay que verificar que $\pi_0$ es $\sigma$-aditiva en el álgebra $\mathcal{H}_0$. Consideremos cualquier unión contable disjunta $\bigcup_1^\infty E_l$ de elementos $E_l \in \mathcal{H}_0$. Se puede reescribir como una unión disjunta $\bigcup_1^\infty E_l = \bigcup_1^\infty (A_j \times B_j)$. Supongamos que esta únion está en $\mathcal{H}_0$, es decir,

$$\bigcup_1^\infty (A_j \times B_j) = \bigcup_1^K (C_k \times D_k).$$

Notemos que

$$C_k \times D_k = \bigcup_j ((A_j \times B_j) \cap (C_k \times D_k)),$$

luego por $(*)$ y el hecho $(A_j \times B_j) \cap (C_k \times D_k) = (A_j \cap C_k) \times (B_j \cap D_k)$,

$$\pi_0(C_k \times D_k) = \sum_{j=1}^\infty \pi_0((A_j \times B_j) \cap (C_k \times D_k)) \qquad (**).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \pi_0\left(\bigcup_j A_j \times B_j\right) &= \pi_0\left(\bigcup_1^K C_k \times D_k\right) \\ &\overset{\text{def } \pi_0}{=} \sum_k \pi_0(C_k \times D_k) \\ &\overset{(**)}{=} \sum_k \sum_j \pi_0((A_j \times B_j) \cap (C_k \times D_k)) \\ &\overset{\text{conv.abs.}}{=} \sum_j \sum_k \pi_0((A_j \times B_j) \cap (C_k \times D_k)) \\ &= \sum_j \pi_0(A_j \times B_j). \end{aligned}$$

Esto muestra que $\pi(\bigcup_{l=1}^\infty E_l) = \sum_{j=1}^\infty \pi_0(A_j \times B_j) = \sum_{l=1}^\infty \pi(E_l)$. Por eso $\pi_0$ es $\sigma$-aditiva en el álgebra $\mathcal{H}_0$. Por el Teorema de Extensión de Carathéodory, $\pi_0$ se extiende a una medida $\pi$ en la $\sigma$-álgebra $\mathcal{H}$ generada por $\mathcal{H}_0$ (de hecho, se extiende a $\mathcal{H}_0^* \supseteq \mathcal{H}$).

Cuando $\mu$, $\nu$ son $\sigma$-finitas, ponemos $X = \bigcup X_n$, $Y = \bigcup Y_n$ para obtener $X \times Y = \bigcup_{m,n}(X_m \times Y_n)$ para deducir que $\pi_0$ también es $\sigma$-finita. Entonces por el Teorema de Extensión de Hahn la extensión es única. $\square$

ANÁLISIS REAL $\#10$

# MEDIDAS PRODUCTO — II

*10.1.* Ejemplo. (No-unicidad de las medidas producto) Sea

$$X = Y = \mathbb{R}, \quad \mathcal{F} = \mathcal{G} = \mathcal{P}(\mathbb{R}), \quad \mu = \nu$$

donde

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & A \text{ contable}, \\ \infty, & A \text{ no contable}. \end{cases}$$

(a) Definamos $\mathcal{H} = \mathcal{F} \times \mathcal{F}$. Para $A \in \mathcal{F}$, definamos

$$\pi(A) = \begin{cases} 0, & \text{si se puede escribir } A = F \cup G \text{ con } F, G \in \mathcal{H} \text{ donde la proyección de } F \text{ en } X \text{ y la proyección de } G \text{ en } Y \text{ son contables;} \\ \infty, & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

Entonces
(1) $\pi$ es una medida;
(2) $\pi(A) = 0 \implies A$ está contenido en una unión contable de líneas de la forma $\{x\} \times Y$ o $X \times \{y\}$;
(3) $F, G \in \mathcal{F} \implies \pi(F \times G) = \mu(F)\mu(G)$.
(valor que es siempre 0 o $\infty$, usamos $0 \cdot \infty = 0$.)

(b) Para $H \in \mathcal{H}$, definamos

$$\rho(A) = \begin{cases} 0, & \text{si se puede escribir } A = F \cup G \cup K \text{ con } F, G, K \in \mathcal{H}, \text{ donde la proyección de } F \text{ en } X, \text{ la proyección de } G \text{ en } Y \text{ y la proyección de } K \text{ en en la diagonal } \{(x, x)\} \text{ son contables;} \\ \infty, & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

Entonces
(1) $\rho$ es una medida;
(2) $\rho(A) = 0 \implies A$ está contenido en una unión contable de líneas verticales u horizontales o diagonales de pendiente $+1$;
(3) $F, G \in \mathcal{F} \implies \rho(F \times G) = \mu(F)\mu(G)$.

(c) Sea $A = \{(x,y): \ x+y=0\}$. Entonces se tiene

$$A \in \mathcal{H}, \quad \pi(A) = \infty, \quad \rho(A) = 0.$$

Conclusión: $\pi \neq \rho$, son dos medidas producto para $\mu, \nu$.

(Nota: hay que verificar que las diagonales son medibles: cubrir con colecciones contables de rectángulos y tomar la intersección de tales uniones.)

## TEOREMA DE FUBINI

*10.2.* Definición. Dado $E \subseteq X \times Y$ y $x \in X$, la $x$-rebanada de $E$ es

$$E_x = \{y \in Y \colon \ (x,y) \in E\}.$$

Dado $y \in X$, la $y$-rebanada de $E$ es

$$E^y = \{x \in X \colon \ (x,y) \in E\}.$$

Definición. Si $F \colon X \times Y \colon \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, $x \in X$ entonces la $x$-rebanada de $F$ es

$$F_x(y) = F(x,y)$$

y dado $y \in Y$, la $y$-rebanada de $F$ es

$$F^y(x) = F(x,y).$$

Dadas medidas $\mu$, $\nu$ en $X$, $Y$ escribimos la "integral iterada" o "integral doble"

$$\int_Y \left( \int_X F \, d\mu \right) d\nu \quad = \quad \int_Y \left( \int_X F(x,y) \, d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

como notación para el valor $\displaystyle\int_Y g \, d\nu$ donde $g(y) = \displaystyle\int_X F^y \, d\mu$.

*10.3.* Ejemplo. Pongamos $X = Y = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{G} = \{$conjuntos de Lebesgue$\}$, con $\mu$= medida de Lebesgue, $\nu$= medida de contar.
Sea $E$ = diagonal = $\{(x,x)\}$, medible en $X \times Y$.
Sea $F = \chi_E$, que es función medible.
Calculamos

$$\begin{aligned}
\int_Y \left( \int_X F\, d\mu \right) d\nu &= \int_Y \left( \int_X \chi_E(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) \\
&= \int \left( \int \chi_{\{y\}}\, d\mu \right) d\nu \\
&= \int 0\, d\nu = 0
\end{aligned}$$

porque $\chi_{\{y\}} = 0$ $\mu$-c.t.p. para $y \in X$. Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\int_X \left( \int_Y F\, d\nu \right) d\mu &= \int_X \left( \int_Y \chi_E(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) \\
&= \int \left( \int \chi_{\{x\}}\, d\nu \right) d\mu \\
&= \int 1\, d\mu = 1
\end{aligned}$$

porque $\int \chi_{\{x\}}\, d\nu = \int_{\{x\}} d\nu = \nu(\{x\}) = 1$.
La conclusión es que $\int_Y \left( \int_X F\, d\mu \right) d\nu \neq \int_X \left( \int_Y F\, d\nu \right) d\mu$.

Por definición, las rebanadas satisfacen (1)

$$\begin{aligned}
(E \setminus F)_x &= \{y \in Y\colon\ (x,y) \in E \setminus F\} \\
&= \{y \in Y\colon\ (x,y) \in E\} \setminus \{y \in Y\colon\ (x,y) \in F\} \\
&= E_x \setminus F_x.
\end{aligned}$$

y (2)

$$\left( \bigcup E_\alpha \right)_x = \{\ y \in Y\colon\ (x,y) \in \bigcup E_\alpha\} = \bigcup (E_\alpha)_x.$$

*10.4.* Proposición. (a) Sea $E$ subconjunto medible de $X \times Y = Z$. Entonces cada rebanada $E_x$, $E^y$ es medible.
(b) Sea $F\colon Z = X \times Y \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ medible. Entonces cada rebanada $F_x$, $F^y$ es medible.

Demostración. (a) Por (1),(2) la familia

$$\mathcal{E} = \{E \subseteq Z\colon\ \text{todas las rebanadas } E_x \text{ de } E \text{ son medibles en } Y.\}$$

es una $\sigma$-álgebra. Cuando $E$ es de la forma $E = A \times B$, entonces

$$E_x = \begin{cases} B, & x \in A \\ \varnothing, & x \notin A. \end{cases}$$

Por lo tanto $\mathcal{E}$ contiene todos los rectángulos medibles, luego tiene que contener a $\mathcal{H}_0$. Luego $\mathcal{E}$ contiene a la $\sigma$-álgebra $\mathcal{H}$ generada por $\mathcal{H}_0$. Similar para probar que $E^y$ es medible en $X$.

(b) Sea $x_0 \in X$. Para investigar la medibilidad de $F_{x_0}$, veamos

$$\begin{aligned} \{y \in Y \colon F_{x_0}(y) > \alpha\} &= \{y \in Y\colon\ F(x_0, y) > \alpha\} \\ &= \{(x, y)\colon\ F(x, y) > \alpha\}_{x_0} \end{aligned}$$

lo cual es medible. Por lo tanto $F_{x_0}$ es medible. Similar para $F^{y_0}$. $\square$

*10.5.* <u>Definición.</u> Una subclase $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ (=conjunto potencia de $X$) es una <u>clase monótona</u> si
(i) $\mathcal{M} \neq \varnothing$;
(ii) Cuando $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$ con $E_j \subseteq \mathcal{M}$, se tiene $\bigcup E_j \subseteq \mathcal{M}$;
(iii) Cuando $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$ con $F_j \subseteq \mathcal{M}$, se tiene $\bigcap F_j \subseteq \mathcal{M}$;

<u>Nota.</u> Toda $\sigma$-álgebra es una clase monótona. Cualquier intersección no-vacía de clases monótonas es también una clase monótona.

<u>Proposición.</u> (Lema de las Clases Monótonas) Sea $\mathcal{F}_0$ un álgebra de subconjuntos de $\mathcal{P}(X)$. Entonces la $\sigma$-álgebra $\sigma(\mathcal{F}_0)$ generada por $\mathcal{F}_0$ es igual a la clase monótona $\mathcal{M}(\mathcal{F}_0)$ generada por $\mathcal{F}_0$.

<u>Demostración.</u> Una $\sigma$-álgebra es siempre una clase monótona, por lo que

$$\mathcal{M}(\mathcal{F}_0) \subseteq \sigma(\mathcal{F}_0).$$

Tenemos que mostrar que $\mathcal{M}(\mathcal{F}_0)$ es una $\sigma$-álgebra;
basta mostrar que es un álgebra.

Dado $E \in \mathcal{M}(\mathcal{F}_0)$, escribiremos

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(E) &= \{F \in \mathcal{M}(\mathcal{F}_0)\colon\ E \setminus F,\ E \cap F,\ F \setminus E \in \mathcal{M}(\mathcal{F}_0)\} \\ &\subseteq \mathcal{M}(\mathcal{F}_0). \end{aligned}$$

Afirmamos que $\mathcal{M}(E)$ *es una clase monótona:*

Claramente $\varnothing, E \in \mathcal{M}(E)$.
Sea $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots$, con $F_j \subseteq \mathcal{M}(E)$.
Entonces $F_n = \bigcup_1^n F_j$, luego los conjuntos

$$E \setminus \bigcup^{\infty} F_j, \quad E \cap \bigcup^{\infty} F_j, \quad \bigcup^{\infty} F_j \setminus E$$

son límites monótonos de $E \setminus F_n$, $E \cap F_n$, $F_n \setminus E$ y por tanto están en $\mathcal{M}(\mathcal{F}_0)$, lo cual dice que $\bigcup^{\infty} F_j \in \mathcal{M}(E)$.
De manera similar $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$ con $F_j \subseteq \mathcal{M}(E)$ implica $\bigcap^{\infty} F_j \in \mathcal{M}(E)$.
Hemos verificado que $\mathcal{M}(E)$ es una clase monótona.

Por la simetría en la definición, $F \in \mathcal{M}(E) \iff E \in \mathcal{M}(F)$.

Cuando $E \in \mathcal{F}_0$ tenemos $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{M}(E)$,
por la hipótesis de que $\mathcal{F}_0$ es un álgebra.
$(F \in \mathcal{F}_0 \implies E \setminus F, E \cap F, F \setminus E \in \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{F}_0) \implies F \in \mathcal{M}(E).)$
Pero $\mathcal{M}(\mathcal{F}_0)$ es la mínima clase monótona que contiene a $\mathcal{F}_0$,
por lo que $\mathcal{M}(\mathcal{F}_0) \subseteq \mathcal{M}(E)$ (siendo $\mathcal{M}(E)$ clase monótona),
luego $(\forall E \in \mathcal{F}_0)\ \mathcal{M}(E) = \mathcal{M}(\mathcal{F}_0)$.
Así tenemos

$$E \in \mathcal{F}_0,\ F \in \mathcal{M}(\mathcal{F}_0) \quad \implies \quad F \in \mathcal{M}(E) \quad \implies \quad E \in \mathcal{M}(F).$$

De esto, para todo $F \in \mathcal{M}(\mathcal{F}_0)$, tenemos $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{M}(F)$.
Otra vez por minimalidad vemos que $\mathcal{M}(\mathcal{F}_0) \subseteq \mathcal{M}(F)$,
luego $\mathcal{M}(F) = \mathcal{M}(\mathcal{F}_0)$ cuando $F \in \mathcal{M}(\mathcal{F}_0)$.

Esto implica que

$$(\forall F \in \mathcal{M}(\mathcal{F}_0))\ (\forall E \in \mathcal{M}(\mathcal{F}_0))\ \ E \cap F,\ F \setminus E \in \mathcal{M}(\mathcal{F}_0),$$

es decir, $\mathcal{M}(\mathcal{F}_0)$ es cerrado bajo intersecciones y diferencias, y como $X \in \mathcal{M}(\mathcal{F}_0)$, es cerrado bajo complementos. Por lo tanto $\mathcal{M}(\mathcal{F}_0)$ es un álgebra, y ya comentamos que siendo clase monótona es una $\sigma$-álgebra. $\square$

*10.6.* Lema. Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios con medida $\sigma$-finitos. Tomemos $E \in \mathcal{H} = \mathcal{F} \times \mathcal{G}$. Entonces (a) las funciones

$$f(x) = \nu(E_x),\ x \in X, \quad g(y) = \mu(E^y),\ y \in Y$$

son medibles, y (b)

$$\int_X f\, d\mu \;=\; \pi(E) \;=\; \int_Y g\, d\nu$$

donde $\pi = \mu \times \nu$.

Demostración. Primero supongamos que las medidas son finitas. Recordando que las funciones $f, g$ introducidas en la afirmación (a) dependen de $E$, definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \{E \in \mathcal{H}\colon\ f, g \text{ son medibles, } \int f\, d\mu = \pi(E) = \int g\, d\nu\} \\ &= \{E \in \mathcal{H}\colon\ (a) \text{ y } (b)\} \end{aligned}$$

Se ve que $\mathcal{M}$ es un álgebra, checando $E - F \in \mathcal{M}$ para $E, F \in \mathcal{M}$ y $E \cup F \in \mathcal{M}$ para $E, F \in \mathcal{M}$ disjuntos.

Si $A, B$ son medibles, $E = A \times B \subseteq X \times Y$, entonces

$$f(x) = \chi_A(x)\nu(B), \quad g(y) = \chi_B(y)\mu(A),$$

$$\int_X f\, d\mu = \mu(A)\,\nu(B) = \pi(A \times B) = \int_Y g\, d\nu$$

por lo que $E \in \mathcal{M}$. Recordando el álgebra $\mathcal{H}_0$ compuesta de las uniones finitas disjuntas de rectángulos medibles $E$, se puede ver de esto que $\mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{M}$.

Queremos verificar que $\mathcal{M}$ es una clase monótona.

Sea $E_n \subseteq E_{n+1} \subseteq \cdots$ y $E = \bigcup E_n$. Así

$$f_n(x) = \nu((E_n)_x), \quad g_n(y) = \mu((E_n)^y)$$

son conjuntos medibles y $\int f_n\, d\mu = \pi(E_n) = \int g_n\, d\nu$.
Tenemos límites crecientes $f_n \uparrow f$, $g_n \uparrow g$, donde $f(x) = \nu(E_x)$, $g(y) = \mu(E^x)$. Aplicamos el Teorema de Convergencia Monótona a las medidas $\mu$,$\nu$, y la continuidad de la medida $\pi$:

$$\int_X f\, d\mu = \pi(E) = \int_Y g\, d\nu.$$

Esto muestra que $E \in \mathcal{M}$.
Un argumento similar para $F_n \supseteq F_{n+1} \cdots$ muestra que $\bigcap F_n \in \mathcal{M}$.
Entonces $\mathcal{M}$ es una clase monótona.

Del Lema de las Clases Monótonas, $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{H} = \sigma$-álgebra generada por $\mathcal{H}_0$. Esto verifica (a) y (b), bajo el supuesto de medidas finitas.

Cuando los espacios son $\sigma$-finitos, tomemos rectángulos $Z_n = X_n \times Y_n$ con $\pi(Z_n) < \infty$, $X \times Y = \bigcup Z_n$ y apliquemos el Teorema de Convergencia Monótona a las restricciones a $E \cap Z_n$. $\square$

*10.7.* <u>Teorema.</u> (de Tonelli) Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios con medida $\sigma$-finitos. Pongamos $Z = X \times Y$, $\pi = \mu \times \nu$ y sea $F\colon Z \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ medible.
Definamos

$$f(x) = \int_Y F_x \, d\nu, \quad g(y) = \int_X F^y \, d\mu.$$

Entonces las funciones $f, g$ son medibles y

$$\int_X f \, d\mu = \int_Z F \, d\pi = \int_Y g \, d\nu.$$

Esto puede escribirse

$$\int_X \left( \int_Y F \, d\nu \right) d\mu = \int_Z F \, d(\mu \times \nu) = \int_Y \left( \int_X F \, d\mu \right) d\nu.$$

<u>Demostración.</u> Sea $E \in \mathcal{H}$.
Supóngase primero que $F = \chi_E$ es una función característica.
Entonces

$$f(x) = \int_Y (\chi_E)_x \, d\nu = \int_Y \chi_{(E_x)} \, d\nu = \int_{E_x} d\nu = \nu(E_x),$$

$$g(y) = \mu(E^y).$$

lo cual reduce la afirmación al Lema anterior. Por lo tanto *la conclusión del Teorema es válida cuando $F$ es una función simple.* $(*)$
En general, hay funciones $\Phi_n\colon Z \to \mathbb{R}$ simples, no-negativas tales que $\Phi_n \uparrow F$. Definamos

$$\varphi_n(x) = \int (\Phi_n)_x d\nu, \quad \psi_n(y) = \int (\Phi_n)^y d\mu.$$

Son medibles, y crecientes en $n$.
Por el Teorema de Convergencia Monótona, $\varphi_n \to f$, $\psi_n \to g$.

Nuevamente por Convergencia Monótona,

$$\int_X f\,d\mu \overset{\text{CM}}{=} \lim \int_X \varphi_n\,d\mu \overset{(*)}{=} \lim \int_Z \Phi_n\,d\pi \overset{(*)}{=} \lim \int_Y \psi_n\,d\nu \overset{\text{CM}}{=} \int_Y g\,d\nu$$

y

$$\int_Z F\,d\pi \overset{\text{CM}}{=} \lim \int_Z \Phi_n\,d\pi. \quad \square$$

*10.8.* Teorema. (de Fubini) Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios con medida $\sigma$-finitos, $\pi = \mu \times \nu$ en $\mathcal{H} = \mathcal{F} \times \mathcal{G}$. Sea $F\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ integrable con respecto a $\pi$. Entonces las funciones

$$f(x) = \int_Y F_x\,d\mu, \quad g(y) = \int_X F^y\,d\nu$$

están definidas c.t.p., y

$$\int_X f\,d\mu = \int_Z F\,d\pi = \int_Y g\,d\nu,$$

o sea

$$\int_X \left( \int_Y F\,d\nu \right) d\mu = \int_Z F\,d(\mu \times \nu) = \int_Y \left( \int_X F\,d\mu \right) d\nu.$$

Demostración. Puesto que $F \in L_1(Z, \mathcal{H}, \pi)$, tambien $F^+, F^- \in L_1(Z, \mathcal{H}, \pi)$. Por el Teorema de Tonelli, las funciones $x$-rebanadas correspondientes $(F^+)_x$, $(F^-)_x$ son medibles y tienen $\mu$-integrales finitas.
Esto dice que $(F^+)_x, (F^-)_x < \infty$ $\mu$-c.t.p. y permite definir $f = (F^+)_x - (F^-)_x$ c.t.p.
De manera similar se define $g = (F^+)^y - (F^-)^y$ y se verifica la fórmula de Fubini. $\square$

*10.9.* Ejemplo. (continuando con el anterior)
$\mu$=medida de Lebesgue, $\nu$=medida de contar en los conjuntos de Lebesgue de $[0,1]$.
Notemos que $\nu$ no es $\sigma$-finita, por lo que no se aplican las hipótesis del Teorema de Tonelli.
Con $F = \chi_E$, $E =$ diagonal, queremos calcular

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]\times[0,1]} F\,d(\mu\times\nu) &= \int_E 1\,d(\mu\times\nu) \\ &= (\mu\times\nu)(E) \\ &= \inf \sum (\mu\times\nu)(R_j). \end{aligned}$$

donde las sumas son sobre las cubiertas $\bigcup R_j \supseteq E$ de $E$ por rectángulos medibles $R_j = A_j \times B_j$.
Dada una tal cubierta,

$$(\forall x \in [0,1])(\exists j)\ (x,x) \in A_j \times B_j.$$

Pero $(x,x) \in A_j \times B_j \iff x \in A_j \cap B_j$. Esto implica que

$$[0,1] = \bigcup_j (A_j \cap B_j).$$

Como $\mu([0,1]) > 0$, existe $j$ para el cual $\mu(A_j \cap B_j) > 0$.
Se sigue que $\mu(A_j) > 0$.
También se sigue que $\mu(B_j) > 0$, por lo que $\nu(B_j) = \infty$.
Al combinar estos datos vemos que $(\mu\times\nu)(A_j \times B_j) = \infty$.
Por lo tanto

$$(\mu\times\nu)(E) = \inf\{\infty\} = \infty$$

y encontramos que

$$\int F\,d(\mu\times\nu) = \infty.$$

Esto dice que $F, \mu, \nu$ no satisfacen esta hipótesis del Teorema de Fubini: $F$ no es integrable con respecto a $\mu\times\nu$.

## ANÁLISIS REAL #11

# APLICACIONES DE TEORIA DE LA MEDIDA A FUNCIONES REALES

Trabajaremos con funciones con dominio en los reales.

*11.1.* Definición. Sea $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Entonces $F$ es absolutamente continua si $(\forall \epsilon > 0)$ $(\exists \delta > 0)$ $(\forall \{(a_j, b_j)\}$ disjuntos en $[a,b])$

$$\sum_j (b_j - a_j) < \delta \implies \sum_j |F(a_j) - F(b_j)| < \epsilon.$$

Sea $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $F$ es absolutamente continua si su restricción a cada intervalo finito es absolutamente continua.

Definición. $F$ es singular si $F$ es diferenciable c.t.p. y $F' = 0$ c.t.p.

Notación. $\mu$ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. $F\!\uparrow$ significa que $F$ es no-decreciente. Recordemos que la medida de Lebesgue-Stieltjes $\mu_F$ está definida para funciones $F\!\uparrow$ que sean continuas por la derecha.

Nuestro objetivo es demostrar el siguiente resultado, que da una relación entre propiedades de funciones $F$ y de sus medidas $\mu_F$.

*11.2.* Proposición. Supóngase que $F\!\uparrow$ y que $F$ es continua por la derecha. Entonces $F$ es diferenciable $\mu$-c.t.p. y además
(i) $\mu_F \ll \mu \quad \implies \quad (\forall x)\ F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)\,dt$
(ii) $\mu_F \perp \mu \quad \iff \quad F$ es singular.

Ejemplo. Sea $F$ la función de Cantor, $C$ el conjunto de Cantor.
Entonces $F' = 0$ $\mu$-c.t.p. ($F$ es singular).
Además $\mu_F([0,1] \setminus C) = 0 = \mu(C)$. Entonces $\mu_F \perp \mu$.

Otro objetivo es demostrar el Teorema Fundamental del Cálculo:
Sea $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Las siguientes son equivalentes:
(a) $F$ es absolutamente continua;
(b) $(\exists f \in L^1)$ $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt$;
(c) $F$ es diferenciable c.t.p., $F' \in L^1$, $F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)\,dt$.

*11.3.* Para seguir con este programa, necesitamos algunos resultados técnicos. Escribimos $I_r(x) = (x - r, x + r)$, así $\mu(I_r(x)) = 2r$. (Notemos que dado $a < b$, existen $x$ y $r$ únicos tales que $I_r(x) = (a,b)$.)

Lema. Dada una colección $\{I_\alpha\}$ de intervalos abiertos y $U = \bigcup_\alpha I_\alpha$ y dado cualquier $c < \mu(U)$, existen índices $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$, tales que los intervalos $I_{\alpha_n}$, $n = 1, \ldots, N$ son disjuntos y

$$\sum_{n=1}^{N} \mu(I_{\alpha_n}) > \frac{c}{3}.$$

Demostración. Observemos que $U$ es una unión disjunta contable $\bigcup J_j$ de intervalos. Primero supongamos que cada $J_j$ es finito. Entonces tomemos $N$ de manera que $\sum_1^N \mu(J_j) > c$, es decir $\epsilon = \sum_1^N \mu(J_j) - c > 0$. Luego para cada $j$ podemos tomar un intervalo cerrado $K_j \subseteq J_j$ con $\mu(K_j) > \mu(J_j) - \epsilon/N$. Puesto que $\sum_1^N \mu(K_j) > \sum_1 \mu(J_j) - \epsilon$, tenemos que $K = \bigcup_1^N K_j \subseteq U$ es un compacto tal que $\mu(K) > c$. Por otra parte, si algún $J_j$ es infinito, simplemente tomemos un intervalo finito $K \subseteq J_j$ tan largo que $\mu(K) > c$.

En todo caso hay una cubierta finita, $K \subseteq \bigcup_{m=1}^{M} I_{\beta_m}$. Definamos

$\alpha_1$ : $I_{\alpha_1}$ es el más largo de los $\{I_{\beta_m}\}$
$\alpha_2$ : $I_{\alpha_2}$ es el siguiente más largo de los $\{I_{\beta_m}\}$ que son disjuntos de $I_{\alpha_1}$
$\alpha_3$ : $I_{\alpha_3}$ es el siguiente más largo de los $\{I_{\beta_m}\}$ que son disjuntos de $I_{\alpha_1} \cup I_{\alpha_2}$
etc.

hasta que no haya ningun $I_{\beta_m}$ disjunto de los $I_{\alpha_n}$ ya elegidos.

Para cualquier $I = I_r(x)$ escribimos $I^* = (x - 3r, x + 3r)$. Notemos que si $I_{\beta_m}$ (algún $1 \leq m \leq M$) no está en la lista $\{I_{\alpha_n}\}$, entonces

$$(\exists n)\ I_{\alpha_n} \cap I_{\beta_m} \neq \varnothing,\ \mu(I_{\beta_m}) \leq \mu(I_{\alpha_n}).$$

(De otro modo $(\forall n)\ I_{\alpha_n} \cap I_{\beta_m} \neq \varnothing \implies \mu(I_{\beta_m}) > \mu(I_{\alpha_n})$, o sea $I_{\beta_m}$ sería más largo que todos los $I_{\alpha_n}$ que lo tocan. No puede tocar $I_{\alpha_1}$. Si tocara $I_{\alpha_2}$, entonces hubiera sido elegido en lugar de $I_{\alpha_2}$, etc.) Tomando un tal $n$, se ve que $I_{\beta_m} \subseteq I^*_{\alpha_n}$. Como $m$ era arbitrario, $K \subseteq \bigcup I^*_{\alpha_n}$. Luego

$$c < \mu(K) < \sum_{n=1}^{N} \mu(I^*_{\alpha_n}) = 3 \sum_{n=1}^{N} \mu(I_{\alpha_n}). \quad \square$$

*11.4.* Definición. Una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es localmente integrable si $(\forall N)$ $\int_{-N}^{N} |f|\, d\mu < \infty$. Se escribe

$$L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) = \{f\colon\ f \text{ es localmente integrable}\}.$$

Para un intervalo $[a,b]$ se define $L^1_{\text{loc}}([a,b]) = L^1[a,b]$.

<u>Definición.</u> Para $f \in L^1_{\text{loc}}$, $r > 0$, el <u>promedio</u> de $f$ en $I_r(x)$ es

$$A_r f(x) = \frac{1}{\mu(I_r(x))} \int_{I_r(x)} f \, d\mu = \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} f(y) \, dy.$$

<u>Nota.</u> $A_r$ es un operador lineal. Para una función constante $c$ se tiene $A_r c = c$. Por ejemplos sencillos se ve que para $x$ fijo, $A_r(x)$ no tiene que ser una función monótona de $r$, ni tiene que ser acotada.

<u>Lema.</u> Sea $f \in L^1_{\text{loc}}$. Entonces
(i) $(\forall r > 0)$ $x \mapsto A_r f(x)$ es medible, y
(ii) $(\forall x)$ $r \mapsto A_r f(x)$ es continua.

<u>Demostración.</u> (i) Sea $B_r = \{(x,y) : |x-y| < r\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Luego,

$$A_r f(x) = \frac{1}{2r} \int (\chi_{B_r} f)_x \, d\mu,$$

lo cual es medible por el Teorema de Fubini.
(ii) Cuando $r \to r_0 \neq 0$, se tiene

$$A_r f(x) = \frac{1}{2r} \int \chi_{I_r(x)} f(x) \, dx \to A_{r_0} f(x)$$

por Convergencia Dominada. (Considerar $|f|$ restringida a $I_{r_0+1}(x)$.)
$\square$

11.5. <u>Definición.</u> La <u>función máxima de Hardy-Littlewood</u> de la función $f \in L^1_{\text{loc}}$ es

$$Hf(x) = \sup_{r>0} A_r |f|(x).$$

<u>Proposición.</u> $Hf$ es medible.

<u>Teorema.</u> (Máximo de Hardy-Littlewood) Sea $f \in L^1_{\text{loc}}$, $\alpha > 0$. Entonces

$$\mu(\{x\colon\ Hf(x) > \alpha\}) \leq \frac{3}{\alpha} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, dx.$$

<u>Demostración.</u> Sea $E = \{x\colon\ Hf(x) > \alpha\}$. Para cada $x \in E$ tomemos $r_x > 0$ tal que $A_{r_x}|f|(x) > \alpha$. Sabemos que $E \subseteq \bigcup_{x \in E} I_{r_x}(x)$. Por un

lema anterior, si $c < \mu(E)$, tomamos $x_1, \ldots, x_N \in E$, donde $I_{r_{x_j}}(x_j)$ son disjuntos y se tiene que

$$\sum 2\, r_{x_j} > \frac{c}{3}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} c < 3\sum_{j=1}^{N} \mu(I_{r_{x_j}}(x_j)) &\leq \frac{3}{\alpha}\sum A_{r_{x_j}}|f|(x_j)\mu(I_{r_{x_j}}(x_j)) \\ &= \frac{3}{\alpha}\sum \int_{I_{r_{x_j}}(x_j)} |f(y)|\, dy \\ &\leq \frac{3}{\alpha}\int_{\mathbb{R}} |f(y)|\, dy. \end{aligned}$$

Como esto se cumple para todo $c < \mu(E)$, la conclusión se sigue. □

*11.6.* Ahora veamos que una funcion es aproximadamente su promedio.

Proposición. Sea $f \in L^1_{\text{loc}}$. Entonces $\lim_{r\to 0} A_r f = f$ ($\mu$-c.t.p.)

Demostración. Fijemos $N > 0$ para trabajar en $[-N, N]$.
Si $|x| \leq N$, $r \leq 1$, entonces $A_r f(x)$ es determinado por $f|_{[-N-1,N+1]}$.
Así podemos suponer que $f \in L^1$ (usando $\chi_{[-(N+1),(N+1)]} f$).
Fijemos $x$. Sea $\epsilon > 0$. Por una propiedad de $L^1$, podemos tomar $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $\displaystyle\int |f-g|\, d\mu < \epsilon$. Luego

$$|A_r g(x) - g(x)| = \frac{1}{2r}\left|\int_{I_r(x)} (g(y) - g(x))\, dy\right|.$$

Así $(\forall \delta > 0)(\exists r_0 > 0)(\forall r < r_0)\ |A_r g(x) - g(x)| < \delta$. Eso es,

$$\lim_{r\to 0} A_r g(x) = g(x).$$

Así $A_r g \to g$ cuando $r \to 0$, además
$A_r(f-g) \leq A_r|f-g| \leq H|f-g|$, luego

$$\begin{aligned} &\limsup_{r\to 0} |A_r f(x) - f(x)| \\ &\quad = \limsup_{r\to 0} |A_r(f-g)(x) + (A_r g - g)(x) + (g-f)(x)| \\ &\quad \leq H(f-g)(x) + |f-g|\,(x). \qquad (*) \end{aligned}$$

Recordemos que $x$ era arbitrario. Fijemos $\alpha > 0$, y definamos

$$\begin{aligned} E_\alpha &= \{x\colon \limsup_{r\to 0} |A_r f(x) - f(x)| > \alpha\}, \\ F_\alpha &= \{x\colon |f-g|(x) > \alpha\}. \end{aligned}$$

Dado ahora cualquier $\epsilon > 0$, tomemos $g$ como anteriormente. Entonces por $(*)$

$$E_\alpha \subseteq F_{\alpha/2} \cup \{x\colon\ H(f-g)(x) > \frac{\alpha}{2}\}.$$

(Recordemos la demostracion sobre "de Cauchy en medida", que si $|A_r f(x) - f(x)| > \alpha$ entonces algún sumando es $> \alpha/2$.)
Pero $\dfrac{\alpha}{2}\mu(F_{\alpha/2}) \leq \displaystyle\int_{F_{\alpha/2}} |f-g|\, d\mu < \epsilon$.
Así, usando el teorema de Hardy-Littlewood,

$$\begin{aligned} \mu(E_\alpha) \quad &\leq \quad \mu(F_{\alpha/2}) + \mu\left(\{x\colon\ H(f-g)(x) > \frac{\alpha}{2}\}\right) \\ &\overset{\text{H-L}}{\leq} \quad \frac{2\epsilon}{\alpha} + 3\frac{2}{\alpha}\epsilon \end{aligned}$$

(el último $\epsilon$ es un $\int_{\mathbb{R}}$). Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, $\mu(E_\alpha) = 0$ para todo $\alpha$.
En particular $\{x\colon\ \lim_{r\to 0} |A_r f - f| > 0\} = \bigcup \mu(E_{1/n})$ tiene medida cero, y concluimos que $\lim_{r\to 0} |A_r f - f| = 0$ ($\mu$-c.t.p.) $\square$

*11.7.* <u>Definición.</u> El <u>conjunto de Lebesgue</u> de una función $f$ es

$$\mathcal{L}_f = \left\{x\colon\ \lim_{r\to 0} \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} |f(y) - f(x)|\, dy = 0\right\}.$$

<u>Proposición.</u> Si $f \in L^1_{\text{loc}}$, entonces $\mu(\mathbb{R} - \mathcal{L}_f) = 0$.

<u>Demostración.</u> Para $c \in \mathbb{R}$, sea $g_c = f - c$. Entonces aplicando la proposición anterior a $|g_c|$,

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} |f(y) - c|\, dy = \lim_{r\to 0} A_r |g_c|(x) = |g_c|(x) = |f(x) - c|$$

para $x \notin S_c$, donde $S_c \subseteq \mathbb{R}$, $\mu(S_c) = 0$.
Sea $S = \bigcup_{c\in\mathbb{Q}} S_c$, luego $\mu(S) = 0$. Tomemos $x \notin S$. Sea $\epsilon > 0$.
Para alguna $c \in \mathbb{Q}$ tenemos $|f(x) - c| < \epsilon$, así

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - c| + \epsilon \text{ para todo } y.$$

Entonces

$$\limsup_{r\to 0} \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} |f(y) - f(x)|\, dy \leq |f(x) - c| + \epsilon < 2\epsilon.$$

Esto es para todo $\epsilon > 0$, luego por definición $x \in \mathcal{L}_f$. $\square$

*11.8.* A veces conviene usar otros conjuntos que $I_r(x)$ para cercar a $x$.

Definición. Sea $\{E_r\}_{r>0}$ una sucesión de conjuntos de Borel que contienen a $x$; decimos que ésta se comprime adecuadamente al punto $x$ si
(i) $(\forall r)$ $E_r \subseteq I_r(x)$ y
(ii) $(\exists \alpha > 0)$ $(\forall r)$ $\mu(E_r) \geq \alpha\, \mu(I_r(x)) = 2\alpha r$. ($\mu$=Lebesgue)
(Lo esencial aquí es que $\alpha$ no depende de $r$. Esto permite usar $E_r$ en lugar de $I_r$ en ciertos contextos.)

Teorema. (de diferenciación de Lebesgue) Sea $f \in L^1_{\text{loc}}$, $x \in \mathcal{L}_f$. Supóngase que $\{E_r\}$ se comprime adecuadamente a $x$. Entonces

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\mu(E_r)} \int_{E_r} |f - f(x)|\, d\mu = 0,$$

de donde

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\mu(E_r)} \int_{E_r} f\, d\mu = f(x).$$

Demostración. (Ejercicio, la primera parte viene de la definición de $\mathcal{L}_f$.) $\square$

*11.9.* Ahora queremos estudiar cómo dividir una función $F$ en sus partes absolutamente continua y singular. Esto lo haremos primero para $\mu_F$, para lo cual necesitamos la noción de diferenciación de medidas.

Definición. Una medida $\nu$ en los borelianos es regular si

$$\nu(E) = \inf\{\nu(U)\colon\ E \subseteq U,\ U \text{ es abierto}\}$$

y además $\nu(K) < \infty$ para cada $K$ compacto. Si $\nu$ es medida signada, se dice regular cuando $\nu^+, \nu^-$ sean regulares.

Nota. La medida de Lebesgue $\mu$ es regular.
Regular implica $\sigma$-finita.

Proposición. Sea $\nu$ una medida signada regular, y sea $\nu = \nu_{\text{abs}} + \nu_{\text{sing}}$ la descomposición de Lebesgue con respecto a $\mu$. Entonces $\nu_{\text{abs}}, \nu_{\text{sing}}$ son regulares.

(Probar primero que $\nu_{\text{abs}}$ es regular y usar $\nu_{\text{sing}} = \nu - \nu_{\text{abs}}$.)

*11.10.* Nota. Dada $f$ (localmente integrable), podemos definir dos nociones de "integral indefinida":

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_a^x f(t)\,dt = \int_{[a,x]} f(t)\,d\mu, \\ \nu(E) &= \int_E f\,d\mu. \end{aligned}$$

Ambas son "absolutamente continuas", y ambas tienen "derivadas"

$$\begin{aligned} \text{derivada de } F \text{ en } x &= \lim_{y\to x} \frac{F(y)-F(x)}{y-x}, \\ \text{derivada de } \nu \text{ en } x &= \lim_{I\to x} \frac{\nu(I)}{\mu(I)}. \end{aligned}$$

Una función o una medida puede tener derivada c.t.p. pero no ser absolutamente continua (como la función de Cantor). Esto es cuando tiene una parte singular no-cero.

*11.11.* ($\mu$=Lebesgue)
Teorema. Sea $\nu$ una medida signada en los conjuntos de Borel de $\mathbb{R}$, con descomposición de Lebesgue $\nu = \nu_{\text{abs}} + \nu_{\text{sing}}$. Para $\mu$-casi todo $x \in \mathbb{R}$, si $\{E_r\}_{r>0}$ se comprime adecuadamente a $x$, entonces

$$\lim_{r\to 0} \frac{\nu(E_r)}{\mu(E_r)} = \frac{d\nu_{\text{abs}}}{d\mu}(x).$$

Demostración. Sabemos que $\nu_{\text{abs}}, \nu_{\text{sing}}$ son regulares, y también $\nu_{\text{sing}} \perp \mu$. Queremos demostrar que

$$\lim_{r\to 0} \frac{\nu_{\text{sing}}(I_r(x))}{\mu(I_r(x))} = 0 \ \mu\text{-c.t.p.} \tag{$*$}$$

Para probar (*) es suficiente trabajar con el caso que $\nu$ es una medida, porque

$$\begin{aligned} \nu_{\text{abs}} + \nu_{\text{sing}} &= \nu = \nu^+ - \nu^- \\ &= ((\nu^+)_{\text{abs}} + (\nu^+)_{\text{sing}}) - ((\nu^-)_{\text{abs}} + (\nu^+)_{\text{sing}}) \\ &= ((\nu^+)_{\text{abs}} - (\nu^-)_{\text{abs}}) + ((\nu^+)_{\text{sing}} - (\nu^-)_{\text{sing}}), \end{aligned}$$

luego usando la unicidad de la descomposición de Lebesgue, $\nu_{\text{sing}} = (\nu^+)_{\text{sing}} - (\nu^-)_{\text{sing}}$.
Nos interesa (*) porque se seguirá que

$$\lim_{r\to 0} \frac{\nu_{\text{sing}}(E_r)}{\mu(E_r)} = 0.$$

Entonces, usando $\nu_{\text{abs}}(E) = \int_E \frac{d\nu_{\text{abs}}}{d\mu}\, d\mu$ y el Teorema de Diferenciación de Lebesgue,

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\mu(E_r)} \int_{E_r} \frac{d\nu_{\text{abs}}}{d\mu}\, d\mu \;=\; \frac{d\nu_{\text{abs}}}{d\mu}(x) \text{ c.t.p.}$$

se completará la demostración.

Para probar (*), tomemos un conjunto de Borel $A$ tal que $\nu_{\text{sing}}(A) = 0 = \mu(\mathbb{R} - A)$, y definimos

$$F_k = \left\{ x \in A\colon \limsup_{r\to 0} \frac{\nu_{\text{sing}}(I_r(x))}{\mu(I_r(x))} > \frac{1}{k} \right\}.$$

Fijemos $k$. Sea $\epsilon > 0$. Como $\nu_{\text{sing}}$ es regular y $\nu_{\text{sing}}(A) = 0$, tomemos $A \subseteq U$ abierto con $\nu_{\text{sing}}(U) < \epsilon$. Para $x \in F_k$, tomemos $r_x$ suficientemente pequeño para que $I_{r_x}(x) \subseteq U$ y

$$\nu_{\text{sing}}(I_{r_x}) > \frac{1}{k}\mu(I_{r_x}) = \frac{2r_x}{k}.$$

Sea $V = \bigcup_{x\in F_k} I_{r_x}(x)$. Así $F_k \subseteq V \subseteq U$. Queremos ver que $\mu(F_k) = 0$. Fijemos $0 < c < \mu(V)$. Por el Lema tomemos $x_1, x_2, \ldots, x_s \in F_k$ con $I_{r_{x_j}}(x_j)$ disjuntos y

$$\frac{c}{3} \;\le\; \sum_{j=1}^{s} \mu(I_{r_{x_j}}(x_j))$$

$$\le\; k\sum_{j=1}^{s} \nu_{\text{sing}}(I_{r_{x_j}}(x_j)) \;\le\; k\nu_{\text{sing}}(V) \;\le\; k\nu_{\text{sing}}(U) \;\le\; k\epsilon,$$

así para todo $c$ tal que $c < \mu(V)$ se tiene $c < 3k\epsilon$. Por lo tanto

$$\mu(F_k) \le \mu(V) \le 3k\epsilon.$$

Luego $\mu(F_k) = 0$, y esto es para todo $k$. Por lo tanto se cumple (*).
$\square$

*11.12.* Ahora podemos usar los resultados para estudiar la variación de funciones y la integral de Riemann-Stieljes.

Definición. La variación de $F$ en el intervalo $[a,b]$ es

$$V_{[a,b]}F = \sup \sum |F(a_{j+1}) - F(a_j)|,$$

donde el supremo se toma usando todas las particiones
$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b$.
Una función $F$ es de variación acotada en $[a,b]$ si

$$V_{[a,b]}F < \infty.$$

Resulta que el concepto de variación acotada es un ingrediente importante para definir la siguiente integral, que generaliza la integral de Riemann.

*11.13.* Definición. La integral de Riemann-Stieltjes en $[a,b]$ de $F$ con respecto a la función $g$ es

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=0}^{k} F(c_i)(g(x_{i+1}) - g(x_i))$$

donde para cada partición $x_0 < x_1 < \ldots < x_k$ de $[a,b]$ se toma $c_i \in [x_i, x_{i+1})$, y se escribe $\Delta = \max_i(x_{i+1} - x_i)$.
Más precisamente, este límite $L$ existe y está bien definido cuando para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| L - \sum_{i=1}^{k} F(c_i)(g(x_{i+1}) - g(x_i)) \right| < \epsilon$$

para toda partición con $\Delta < \delta$. En tal caso escribimos $L = \displaystyle\int_a^b F\,dg$, decimos que $F$ es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a $g$.
(Nótese que $g$ no tiene que ser creciente.)

Proposición. Sea $F$ continua en $[a,b]$ y sea $g$ de variación acotada en $[a,b]$. Entonces $F$ es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a $g$ en $[a,b]$.

Demostración. Hay que ver que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualquier par de particiones $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ y

$y_0 < y_1 < \ldots < y_m$ con separaciones máximas $\Delta_x < \delta$ y $\Delta_y < \delta$, respectivamente,

$$\left|\sum_{i=0}^{n} F(c_i)(g(x_{i+1}) - g(x_i)) - \sum_{j=0}^{m} F(d_j)(g(y_{j+1}) - g(y_j))\right| \leq \epsilon,$$

donde $c_i \in [x_i, x_{i+1})$ y $d_j \in [y_j, y_{j+1})$ (notar que $c_i$ y $d_j$ se pueden tomar arbitrarios pero dentro de los intervalos).
Dado $\epsilon$, por ser $F$ continua en $[a, b]$, $F$ es uniformemente continua y podemos escoger $\delta > 0$ tal que $|F(c) - F(d)| < \epsilon / V_{[a,b]} g$ cuando $c, d \in [z, z']$ con $|z - z'| < \delta$.
Ahora juntemos las dos particiones en una sola $z_0 < z_1 < \ldots < z_N$ donde $\{z_k\} = \{x_i\} \cup \{y_i\}$ con $N \leq n + m$ (ordenando los puntos de división $z_k$). Así $z_{k+1} - z_k < \delta$. Consideremos $x_i < x_{i+1}$, con la partición refinada como

$$x_i = z_k < z_{k+1} < \cdots < z_{k'} = x_{i+1}$$

y observamos que

$$F(c_i)(g(x_i + 1) - g(x_i)) = \sum_{t=k}^{k'-1} F(c_i)(g(z_{t+1}) - g(z_t)).$$

Usando una descomposición similar para $F(d_j)(g(y_{j+1}) - g(y_j))$, se deduce que

$$\left|\sum_{i=0}^{n} F(c_i)(g(x_{i+1}) - g(x_i)) - \sum_{j=0}^{m} F(d_j)(g(y_{j+1}) - g(y_j))\right| \leq$$

$$\sum_{k=0}^{N} |F(c_{i_k}) - F(d_{j_k})||g(z_{k+1}) - g(z_k)| \leq \frac{\epsilon}{V_{[a,b]} g} V_{[a,b]} g = \epsilon.$$

□

A continuación enunciamos una fórmula de utilidad práctica, resultado que puede deducirse por medio del Teorema del Valor Medio.

Proposición. Sea $F$ continua y $g$ diferenciable en $[a, b]$ con $g'$ Riemann integrable. Entonces

$$\int_a^b F\, dg = \int_a^b F(x)\, g'(x)\, dx.$$

*11.14.* Ahora tenemos resultados acerca de variación acotada.

Proposición. Absolutamente continua implica variación acotada.

Proposición. Sea $F$ de variación acotada. Entonces $F$ es la diferencia de dos funciones crecientes (descomposición de Jordan de $F$):

$$F = \frac{1}{2}(V_{[a,\cdot]}F + F) - \frac{1}{2}(V_{[a,\cdot]}F - F).$$

Así como el estudio de una medida signada $\nu$ se reducía al estudio de medidas $\nu^+, \nu^-$, también el estudio de funciones de variación acotada se reduce al estudio de funciones crecientes $F^+, F^-$.

Nota. Para $F$ de variación acotada y continua por la derecha, podemos definir la medida *signada* de Lebesgue-Stieltjes $\mu_F$ como diferencia de dos medidas de Lebesgue-Stieltjes. (Las funciones de la descomposición de Jordan también serán continuas por la derecha.)

*11.15.* Definición. $\overrightarrow{F}(x) = \lim_{r\downarrow 0} F(x+r)$, $\overleftarrow{F}(x) = \lim_{r\downarrow 0} F(x-r)$.
Tales funciones existen cuando $F$ es creciente.
En tal caso $\overrightarrow{F}$ es continua por la derecha, por lo que $\mu_{\overrightarrow{F}}$ existe.

Proposición. Sea $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F\uparrow$. Entonces
(a) $F$ es continua, excepto en a lo más un conjunto contable de puntos.
(b) $F$ y $\overrightarrow{F}$ son diferenciables $\mu$-c.t.p., y $F' = (\overrightarrow{F})'$ $\mu$-c.t.p.

Demostración. (a) Los intervalos abiertos $(\overleftarrow{F}(x), \overrightarrow{F}(x))$ son disjuntos (son $\varnothing$ cuando $\overleftarrow{F}(x) = \overrightarrow{F}(x)$), así para cualquier $N$

$$\sum_{|x|<N} (\overrightarrow{F}(x) - \overleftarrow{F}(x)) \leq F(N) - F(-N).$$

Como $F(N) - F(-N) < \infty$, el conjunto

$$\{x\colon\ |x| < N,\ \overleftarrow{F}(x) \neq \overrightarrow{F}(x)\}$$

es contable. Tomando $N = 1, 2, \ldots$ obtenemos una unión contable de contables para los puntos de discontinuidad.
(b) Sea $\nu = \mu_{\overrightarrow{F}}$, $E_r = (x-r, x]$ o $(x, x+r]$ en el Teorema de Derivadas de Medidas:

$$\lim_{r\to 0} \frac{\overrightarrow{F}(x+r) - \overrightarrow{F}(x)}{r} = \lim_{r\to 0} \frac{\mu_{\overrightarrow{F}}(E_r)}{\mu(E_r)} = \frac{d\mu_{\overrightarrow{F}}}{d\mu}(x) \quad \mu\text{-c.t.p.}$$

(como siempre, $\mu$ es la medida de Lebesgue.)
Por lo tanto $\overrightarrow{F}'$ existe $\mu$-c.t.p.
Ahora sea $g = \overrightarrow{F} - F$, por demostrar que $g' = 0$ $\mu$-c.t.p.
Por (a), podemos escribir

$$\{x\colon\ g(x) \neq 0\} = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}.$$

Luego $g(x_i) > 0$ y $(\forall N)\ \displaystyle\sum_{|x_i|<N} g(x_i) < \infty$. Sea $\lambda(E) = \displaystyle\sum_{x_i \in E} g(x_i)$.
Se puede verificar que $\lambda$ es una medida de Borel regular y que $\lambda \perp \mu$. (Obsérvese la relación entre $\lambda$ en un intervalo y el crecimiento de $F$ en el intervalo.) Como $\lambda_{\text{abs}} = 0$, otra vez por el Teorema de Derivadas de Medidas se tiene que $\displaystyle\lim_{r\to 0} \frac{\lambda(I_r(x))}{2r} = 0$ $\mu$-c.t.p.. Así que

$$\left|\frac{g(x+r) - g(x)}{r}\right| \leq \frac{\lambda(I_r(x))}{r} \to 0 \quad \mu\text{-c.t.p.}$$

Similarmente para $g(x) - g(x-r)$, por lo tanto $g' = 0$ ($\mu$-c.t.p.).
Se sigue que $F'$ existe y es igual a $\overrightarrow{F}'$ $\mu$-c.t.p.

*11.16.* Ahora retomamos los objetivos planteados. Trabajaremos en un intervalo finito $[a, b]$, así escribiremos $L^1$ en lugar de $L^1_{\text{loc}}$.

Proposición. Supóngase que $F$ es de variación acotada y continua por la derecha. Entonces $F' \in L^1$, y
(i) $\mu_F \ll \mu \iff (\forall a, x)\ F(x) = F(a) + \displaystyle\int_a^x F'(t)\, dt$;
(ii) $\mu_F \perp \mu \iff F' = 0$ ($\mu$-c.t.p.).

Demostración. Primero notemos lo siguiente. Usando $E_r = (x, x+r]$ en los $x$ donde $F$ es diferenciable,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{r\downarrow 0} \frac{F(x+r) - F(x)}{r} \\ &= \lim_{r\downarrow 0} \frac{\mu_F(E_r)}{\mu(E_r)} = \frac{d(\mu_F)_{\text{abs}}}{d\mu}(x) \quad \mu\text{-c.t.p.} \end{aligned} \qquad (*)$$

Dado que $F'$ una derivada de Radon-Nikodým, es integrable sobre cualquier intervalo finito (porque $F(b) - F(a)$ es finito).
(i) Se sabe que

$$\mu_F \ll \mu \iff \mu_F = (\mu_F)_{\text{abs}}. \qquad (**)$$

($\Rightarrow$) Sea $\mu_F \ll \mu$. Entonces por $(*)$ y $(**)$

$$F(x) - F(a) = \mu_F((a, x]) = \int_{(a,x]} \frac{d\mu_F}{d\mu}\, d\mu = \int_a^x F'(t)\, dt.$$

($\Leftarrow$) Por hipótesis $F(x) - F(a) = \displaystyle\int_a^x F'(t)\,dt$. Entonces por $(*)$,

$$\mu_F(E) = \int_E \frac{d(\mu_F)_{\text{abs}}}{d\mu}\,d\mu$$

para todo $E$ de la forma $(a, x]$, luego para todo conjunto de Borel. Esto nos dice que $\mu_F$ es una integral indefinida, por lo tanto $\mu_F \ll \mu$.
(ii)

$$\mu_F \perp \mu \iff (\mu_F)_{\text{abs}} = 0 \iff \frac{d(\mu_F)_{\text{abs}}}{d\mu} = 0$$

$$\overset{(*)}{\iff} F' = 0 \ \mu\text{-c.t.p.} \quad \square$$

*11.17.* <u>Proposición.</u> Sea $F$ de variación acotada y continua por la derecha. Entonces

$$F \text{ es absolutamente continua} \iff \mu_F \ll \mu.$$

<u>Demostración.</u> ($\Rightarrow$) Supongamos que $F$ es absolutamente continua. Sea $\mu(E) = 0$. Queremos probar que $\mu_F(E) = 0$. Tomemos $\epsilon > 0$, escojamos $\delta$ como en la definición de funciones absolutamente continuas.
Tomemos $U_i \supseteq E$, $U_i$ abiertos, $\mu(U_i) < \delta$, $\mu_F(U_i) \to \mu_F(E)$. (Recordar la construcción de la medida de Lebesgue-Stieltjes $\mu_F$, y usar el hecho que se pueden intersectar abiertos que satisfagan las propiedades para $\mu$ y $\mu_F$ por separado.) Podemos suponer que $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \ldots$
Como $U_i$ es una unión disjunta de intervalos $(a_k^i, b_k^i)$, $k = 1, 2, \ldots$ y la suma de sus longitudes es menor que $\delta$,

$$|\mu_F(E)| - \epsilon \leq |\mu_F(U_i)| \leq \sum_k |\mu_F((a_k^i, b_k^i))| \leq \sum_k |F(b_k^i) - F(a_k^i)| < \epsilon$$

donde se escoge algún $i$ tan grande que $|\mu_F(U_i) - \mu_F(E)| < \epsilon$. Luego $\mu_F(E) = 0$. Por lo tanto $\mu_F \ll \mu$.
($\Leftarrow$) Supongamos que $\mu_F \ll \mu$. Como las medidas son finitas,
$(\forall \epsilon)(\exists \delta)\ \mu(E) < \delta \implies \mu_F(E) < \epsilon$.
Apliquemos esto a $E = \bigcup_{i=1}^N (a_i, b_i]$ para ver que efectivamente $F$ es absolutamente continua. $\square$

*11.18.* <u>Teorema.</u> (Fundamental del Cálculo) Las siguientes son equivalentes:
(a) $F$ es absolutamente continua;

(b) $(\exists f \in L^1)\ F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt$;

(c) $F$ es diferenciable c.t.p., $F' \in L^1$, $F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)\,dt$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Supongamos que $F$ es absolutamente continua. Entonces $F$ es de variación acotada, y $F = F_1 - F_2$ con $F_1, F_2$ crecientes. Entonces $F_1, F_2$ son diferenciables c.t.p. y las derivadas son integrables. Así $F$ es diferenciable y $F'$ es integrable. (Notemos que $F = \overrightarrow{F}$ porque $F$ es continua). Tenemos que $\mu_F \ll \mu$, entonces por un resultado anterior

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)\,dt.$$

(b) $\Rightarrow$ (c) Se sigue fácilmente ya teniendo a $f$ con que razonar: Usar el Teorema de Diferenciación de Lebesgue en la definición de $dF/dx$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Cualquier integral indefinida es absolutamente continua. $\square$

ANÁLISIS REAL $\#12$

# TEOREMA DE ARZELA-ASCOLI

El tema aquí es la convergencia uniforme, no tiene mucho que ver con medida o integración.

$\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ es el espacio vectorial de funciones continuas un el espacio topológico $X$. La cuestión es determinar cuándo se pueden aproximar soluciones de problemas en $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ por medio de funciones en una subfamilia dada $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. Por ejemplo, a veces podemos construir una sucesión $\{f_n\}$ de funciones que satisfacen algún problema de forma aproximada, entonces un límite $\lim f_n$ sería candidato a solución exacta. Aquí $\mathcal{F}$ no necesariamente será densa en $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$.

*12.1.* En lo siguiente se podría usar $\mathbb{C}$ en lugar de $\mathbb{R}$ y de hecho con pocos cambios las funciones podrían tomar valores en un espacio métrico. Para $X$ tomaremos cualquier abierto $A \subseteq \mathbb{R}^d$ en un espacio euclidiano; esto también se podría generalizar.

<u>Definición.</u> $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(A,\mathbb{R})$ es una <u>familia normal</u> si toda sucesión en $\mathcal{F}$ tiene una subsucesión que converge uniformemente en compactos de $A$ a un elemento de $\mathcal{C}(A,\mathbb{R})$. (El límite no tiene que estar en $\mathcal{F}$.)

<u>Definición.</u> Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(A,\mathbb{R})$.
$\mathcal{F}$ es <u>uniformemente acotada</u> si $(\exists M)(\forall x \in A)(\forall f \in \mathcal{F})\ |f(x)| < M$.

$\mathcal{F}$ es <u>uniformemente acotada en $E \subseteq A$</u> si
la familia $\mathcal{F}|_E = \{f|_E\colon\ f \in \mathcal{F}\}$ es uniformemente acotada.

$\mathcal{F}$ es <u>uniformemente acotada en compactos</u> si
$(\forall K \subseteq A,\ K$ compacto$)$ $F$ es uniformemente acotada en $K$.

$\mathcal{F}$ es <u>localmente uniformemente acotada</u> si
$(\forall x \in A)(\exists$ una vecindad $V$ de $x)$ $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada en $V$.

$\mathcal{F}$ es <u>puntualmente acotada</u> si $\mathcal{F}$ es
uniformemente acotada en cada subconjunto de un solo punto de $A$.

$\mathcal{F}$ es <u>(uniformemente) equicontinua en $E$</u> si $(\forall \epsilon > 0)$

$$(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in E)(\forall f \in \mathcal{F})\ |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon.$$

$\mathcal{F}$ es <u>equicontinua en compactos</u> si
$\mathcal{F}$ es equicontinua en todo subconjunto compacto $K$ de $A$.

$\mathcal{F}$ es localmente equicontinua si
$(\forall x \in A)(\exists$ una vecindad $V$ de $x)$ $\mathcal{F}$ es equicontinua en $V$.

*12.2.* Teorema. (Arzela-Ascoli) Sea $A$ un abierto conexo en un $\mathbb{R}^d$. Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ una subfamilia. Entonces $\mathcal{F}$ es una familia normal si y sólo si satisface las siguientes dos condiciones:
(a) $\mathcal{F}$ es equicontinua en compactos de $A$; y
(b) $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada en algún punto de $A$.

Ejemplo. La serie $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ converge a $1/(1-x)$ para todo $x \in (-1,1)$, pero no uniformemente. Pongamos

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k, \qquad f(x) = 1/(1-x).$$

Luego $f_n \to f$ uniformemente en $[-1+\epsilon, 1-\epsilon]$ para todo $\epsilon > 0$.
Este es un ejemplo de convergencia uniforme en compactos.

Nota. Para funciones diferenciables en un intervalo real, para equicontinuidad es suficiente que la colección de las derivadas sea uniformemente acotada. Esto es porque

$$|f(x) - f(y)| \leq |x-y| \sup |f'|.$$

*12.3.* Nota. "equicontinua" no implica "localmente uniformemente acotada" ni "familia normal" (considerar $\mathcal{F} = \{\text{constantes}\}$).

Proposición. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ es localmente uniformemente acotada $\iff$ $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada en compactos de $A$.

Proposición. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ es localmente equicontinua $\iff$ $\mathcal{F}$ es equicontinua en compactos de $A$.

*12.4.* Nota. El abierto $A$ siempre puede escribirse $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ donde $K_n \subseteq \operatorname{int} K_{n+1}$, $K_n$ compacto. Por ejemplo,

$$K_n = \{x \in A \colon \operatorname{dist}(x, \partial A) \geq \frac{1}{n}\} \cap \{x \in \mathbb{R}^d \colon |x| \leq n\}$$

que es cerrado y acotado, luego compacto.
Además, todo compacto $K \subseteq A$ está contenido en alguno de los $K_n$.
Por eso, ser equicontinuo en cada $K_n$ es ser equicontinuo en cada compacto de $A$.

Demostración. (de Arzela-Ascoli) Tenemos $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$.
( $\Longrightarrow$ ) Supongamos que $\mathcal{F}$ es familia normal.
(a) Supóngase que existiera un compacto $K \subseteq A$ tal que $\mathcal{F}$ no fuera equicontinua en $K$. Esto puede escribirse

$$\sim \ (\forall \epsilon)(\exists \delta)(\forall f)(\forall x, x' \in K) \ |x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \epsilon.$$

que se convierte en

$$(\exists \epsilon)(\forall \delta)(\exists f)(\exists x, x' \in K) \ |x - x'| < \delta, \ |f(x) - f(x')| \geq \epsilon.$$

De acuerdo con esto tomamos $\epsilon > 0$, y para cada $n$ (usando $\delta = 1/n$) tomamos $f_n$, $x_n$, $x'_n$ tales que

$$|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}, \ |f_n(x_n) - f_n(x'_n)| \geq \epsilon.$$

Como $\mathcal{F}$ es familia normal, $\{f_n\}$ tiene una subsucesión convergente; y como $K$ es compacto, la subsucesión correspondiente de $\{x_n\}$ tiene una subsubsucesión convergente. Una subsubsubsucesión de $\{x'_n\}$ también converge. Entonces tomamos índices $\{n_k\}$ de manera que

$$f_{n_k} \to f \text{ uniformemente en compactos}, \ x_{n_k} \to x, \ x'_{n_k} \to x'$$

con $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ y $x, x' \in K$.
Pero $|x_{n_k} - x'_{n_k}| < 1/n_k$ nos dice $|x - x'| = 0$, $x = x'$.
Por eso $0 = |f(x) - f(x')| \geq \epsilon$, lo cual es absurdo.
La conclusión es que $\mathcal{F}$ es equicontinua en cada compacto en $A$.

(b) Si $\mathcal{F}$ no fuera acotada puntualmente, digamos no siendo acotada en $x \in A$, entonces podríamos tomar $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ con $|f_n(x)| \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Por ser $\mathcal{F}$ una familia normal, hay una subsucesión convergente $f_{n_k} \to f$, luego $|f(x)|$ es mayor que todo número real, lo cual es absurdo. Entonces $\mathcal{F}$ es acotada puntualmente.

( $\Leftarrow$ ) Suponemos (a) y (b).

Primero tenemos que verificar que $\mathcal{F}$ *es puntualmente acotada*. Para ello supongamos que $f(x_1) \leq M$ para toda $f \in \mathcal{F}$ (como nos da la hipótesis (b)), y consideramos cualquier $x_2 \in A$. Por ser conexo $A$, hay un curva $\gamma\colon [0,1] \to A$ que une $x_1$ con $x_2$. Por equicontinuidad de $\mathcal{F}$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < 1$ cuando $|x - y| < \delta$, por cualquier $f \in \mathcal{F}$ que sea. Como $\gamma$ es uniformemente continua en el intervalo cerrado $[0,1]$, podemos tomar $N$ tal que $|s-t| < 1/N \implies |\gamma(s) < \gamma(t)| < \delta$. Entonces

$$\begin{aligned} |f(x_2) - f(x_1)| &= |f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))| \\ &\leq \sum_{j=1}^{N} \left| f\left(\gamma(\frac{j-1}{N})\right) - f\left(\gamma(\frac{j}{N}))\right) \right| \\ &\leq N \end{aligned}$$

para todo $f \in \mathcal{F}$. Por lo tanto $\{|f(x_2)|\}$ es acotado por $M+N$.

Consideremos alguna sucesión de funciones en $\mathcal{F}$. Sea $\{x_n\}$ un subconjunto denso y contable en $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Por ser $\mathcal{F}$ puntualmente acotada hay una subsucesión $\{f_j\}$ que converge en el punto $x_1$. Apliquemos el "procedimiento diagonalizador de Cantor":

Pongamos $\mathbb{N}_1 = \mathbb{Z}^+$. Cualquier subsucesión de cualquier sucesión se puede describir por la colección de índices que utiliza. Entonces las subsucesiónes corresponden a los subconjuntos infinitos de los naturales. (Para entender esto más claramente: cada subconjunto infinito de $\mathbb{Z}^+$ tiene un $k$-ésimo elemento $n_k$ para cada $k$.) Tomemos

$$\mathbb{N}_2 \overset{\text{inf.}}{\subseteq} \mathbb{N}_1 : \quad \{f_j \colon j \in \mathbb{N}_2\} \text{ converge en } x_2,$$

$$\mathbb{N}_3 \overset{\text{inf.}}{\subseteq} \mathbb{N}_2 : \quad \{f_j \colon j \in \mathbb{N}_3\} \text{ converge en } x_3,$$

etc. Obtenemos conjuntos infinitos anidados

$$\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}_1 \supseteq \mathbb{N}_2 \supseteq \mathbb{N}_3 \supseteq \dots$$

Definimos

$$k_j = j\text{-ésimo elemento de } \mathbb{N}_j.$$

Entonces $k_{j+1} > k_j \geq j$, lo cual dice $k_j \to \infty$.
Por lo tanto podemos usar $\{k_j\}$ para definir una subsucesión.
Para cada $n$, la sucesión $\{f_{k_j}(x_n)\}_j$ converge, porque una cola de esta sucesión coincide con una subsucesión de $\{f_j(x_n)\}_{j \in \mathbb{N}_n}$, que es convergente.

Afirmamos que *La sucesión de funciones $\{f_{k_j}\}_j$ converge uniformemente en cada compacto de $A$.*

Tomemos $K \subseteq A$ compacto.
Para ver que $\{f_{k_j}\}$ converge uniformemente en $K$:

Sea $\epsilon > 0$. Por (a), $\{f_{k_j}\}$ es equicontinua en $K$.
Entonces tomemos $\delta > 0$ tal que

$$(\forall x, x' \in K)(\forall j)\ |x - x'| < \delta \implies |f_{k_j}(x) - f_{k_j}(x')| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Se cubre $K$ con un número finito de discos de radio $\delta/2$ en $\mathbb{R}^d$.
Hay un $x_n$ en cada disco porque $\{x_n\}$ es denso en $A$, tomemos uno.
Sabemos que $\{f_{k_j}(x_n)\}_j$ converge, entonces para toda esta colección finita de $x_n$, hay un índice $i_0$ tal que

$$i, j > i_0 \implies |f_{k_i}(x_n) - f_{k_j}(x_n)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Ahora consideremos $x \in K$ arbitrario.
Uno de los $x_n$ que acabamos de mencionar satisface $|x - x_n| < \delta$.
Entonces

$$\begin{aligned} |f_{k_i}(x) - f_{k_j}(x)| &\leq |f_{k_i}(x) - f_{k_i}(x_n)| + |f_{k_i}(x_n) - f_{k_j}(x_n)| \\ &\quad + |f_{k_j}(x_n) - f_{k_j}(x)| \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Esto dice que $\{f_{k_j}\}$ es uniformemente de Cauchy en $K$.
En consecuencia converge uniformemente en $K$ como habíamos afirmado.

En particular $\{f_{k_j}(x)\}$ converge para cada $x \in A$,
por lo que hay una sola función límite $f = \lim f_{k_j}$ en todo $A$.
Por construcción $f_{k_j} \to f$ uniformemente en compactos.

La conclusión es que $\mathcal{F}$ es una familia normal. $\square$

Nota. Si $A$ no es conexo, se puede cambiar la condición (b) para "$\mathcal{F}$ es puntualmente acotada".

ANÁLISIS REAL #13

# TEOREMA DE STONE-WEIERSTRASS

Este tema se trata de convergencia uniforme. Se trabaja con funciones continuas, no se toman en cuenta derivadas, tampoco cuestiones de medida cero.

*13.1.* Lema. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Entonces existe un polinomio $p_n$ con coeficientes reales (no necesariamente de grado $n$) tal que para $t \in [-1,1]$,

$$\big|\ p_n(t) - |t|\ \big| < \frac{1}{n}.$$

Demostración. Comenzamos con $a_k(t) = (1-t^2)^k$.
Satisface $a_k(0) = 1$, $a_k(-1) = a_k(1) = 0$ y

$$(\forall \epsilon)(\exists k)(\forall t)\ \epsilon \le |t| \le 1 \implies |a_k(t)| < \epsilon,$$

por eso se llama una "función chipote".
Sea $b_k(t) = \displaystyle\int_{-1}^{t} a_k(s)\,ds$,
que es una función creciente para $-1 \le t \le 1$.
Normalizamos con $c_k(t) = b_k(t)/b_k(1)$, así

$$c_k(-1) = 0, \quad c_k(1) = 1.$$

Más aún, $c_k(t)$ está cerca de 0 para $-1 \le t \le -\epsilon$, y cerca de 1 para $\epsilon \le t \le 1$. Luego definimos $d_k(t) = \displaystyle\int_{-1}^{t} c_k(s)\,ds$, y vemos que $d_k(t)$ está cerca de 0 para $-1 \le t \le -\epsilon$, y cerca de $t = \int_0^t 1\,ds$ para $\epsilon \le t \le 1$.
Finalmente definimos $e_k(t) = 2d_k(t) - t$. Entonces dado $n$, el polinomio deseado es $p_n = e_k$ para $k$ suficientemente grande. $\square$

*13.2.* Sea $X$ un espacio topológico compacto. En los espacios de funciones continuas $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$, $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ tenemos la norma $\|f\| = \|f\|_\infty = \sup|f|$. Estos espacios no solamente son lineales, podemos multiplicar funciones también. Un subconjunto cerrado bajo las operaciones de sumar y multiplicar, y bajo la multiplicación por escalares reales, se llama una subálgebra de funciones.

Definición. Se dice que un subconjunto $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ separa puntos si $(\forall x, y \in X\colon\ x \ne y)(\exists f \in \mathcal{F})\ f(x) \ne f(y)$.

*13.3.* <u>Teorema.</u> (Stone-Weierstrass) Sea $X$ un espacio de Hausdorff compacto. Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ una subfamilia. Supongamos que $\mathcal{F}$ es una subálgebra con unidad, tal que $\mathcal{F}$ separa los puntos de $X$. Entonces $\mathcal{F}$ es denso en $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

<u>Demostración.</u> (1) $\underline{\overline{\mathcal{F}} = \text{cerr}\, \mathcal{F} \text{ es una subálgebra}}$:
Sean $f, g \in \overline{\mathcal{F}}$. Tomemos $f_n, g_n \in \mathcal{F}$ con $f_n \to f$, $g_n \to g$ cuando $n \to \infty$. (Por definición la convergencia es uniforme.)
Entonces $f_n + g_n \to f + g$, $f_n g_n \to fg$, $cf_n \to cf$ y como $\mathcal{F}$ es subálgebra, $f_n + g_n \in \mathcal{F}$, $f_n g_n \in \mathcal{F}$, $cf_n \in \mathcal{F}$.
Por lo tanto $f + g, fg, cf \in \overline{\mathcal{F}}$.

(2) Sea $p$ un polinomio real. Entonces $\underline{f \in \overline{\mathcal{F}} \implies p \circ f \in \overline{\mathcal{F}}}$:
Por hipótesis $1 \in \overline{\mathcal{F}}$. Como $\overline{\mathcal{F}}$ es una subálgebra tenemos $f^2, f^3, \ldots \in \overline{\mathcal{F}}$ y luego $p \circ f = \sum c_k f^k \in \mathcal{F}$.

(3) $\underline{f \in \overline{\mathcal{F}} \implies |f| \in \overline{\mathcal{F}}}$:
Pongamos $f \neq 0$, de otro modo es trivial. Sea $g = f/\|f\|$.
Luego $g \colon X \to [-1, 1]$, y $g \in \overline{\mathcal{F}}$.
Por el Lema, para todo $n$ hay un polinomio $p_n$ con

$$\big|\; p_n \circ g - |g| \;\big| < \frac{1}{n}$$

lo cual dice que $p_n \circ g \to |g|$, y por (2) tenemos $p_n \circ g \in \overline{\mathcal{F}}$.
En consecuencia $|g| \in \overline{\mathcal{F}}$, luego $|f| \in \overline{\mathcal{F}}$.

(4) $\underline{f, g \in \overline{\mathcal{F}} \implies \max(f, g), \min(f, g) \in \overline{\mathcal{F}}}$:
estas expresiones son $(1/2)(f + g \pm |f - g|)$.

(5)(a) Dados $x, y \in X,\; x \neq y$,

$$\underline{(\exists f \in \overline{\mathcal{F}})\; 0 \leq f \leq 1,\; f|_{\text{vec. de } x} = 0,\; f|_{\text{vec. de } y} = 1} :$$

Puesto que $\mathcal{F}$ separa, tomamos $f_1 \in \mathcal{F}$: $f_1(x) \neq f_1(y)$. Sea

$$f_2 = 3\frac{f_1 - f_1(x)}{f_1(y) - f_1(x)} - 1 \in \mathcal{F}$$

de manera que $f_2(x) = -1$, $f_2(y) = 2$.
Sea $f = \min(\max(f_2, 0), 1)$. Por (4) sabemos $f \in \overline{\mathcal{F}}$ y por construcción $f$ satisface las demás propiedades.

(5)(b) Dados $A \subseteq X$ cerrado, $y \in X - A$,

$$\underline{(\exists f \in \overline{\mathcal{F}})\ \ 0 \le f \le 1,\ \ f|_A = 0,\ \ f|_{\text{vec. de } y} = 1}:$$

Como $X$ es compacto, $A$ es compacto.
Por (5a) cada $x \in A$ tiene una vecindad $U_x$ y una función $f_x \in \overline{\mathcal{F}}$ tal que $f_x|_{U_x} = 0$, $f_x(V_x) = 1$ para una vecindad $V_x$ de $y$.
Se cubre $A = \bigcup_1^n U_{x_i}$ y se toma $f = \min(f_{x_1}, \ldots, f_{x_n}) \in \overline{\mathcal{F}}$ por medio de (4). Entonces $f$ satisface las condiciones porque la intersección $\bigcap V_{x_i}$ de un número finito de vecindades de $y$ es una vecindad de $y$.

(5)(c) Dados $A, B \subseteq X$ cerrados, disjuntos,

$$\underline{(\exists f \in \overline{\mathcal{F}})\ 0 \le f \le 1,\ \ f|_A = 0,\ \ f|_B = 1}:$$

Similar: se cubre $B = \bigcup V_y$ con $V_y$ vecindad de $y \in B$ tal que $f_y|_A = 0$, $f_y|_{V_y} = 1$, y se toma una subcubierta finita $B = \bigcup_1^n V_{y_i}$ y se define $f = \max f_{y_i}$.

(6) $\underline{\mathcal{F} \text{ es denso en } \mathcal{C}(X, \mathbb{R})}$:
Supongamos que no. Entonces hay $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ tal que

$$d = \inf\{\|f - g\|\colon\ g \in \overline{\mathcal{F}}\} > 0.$$

Por definición de inf tomamos $g \in \overline{\mathcal{F}}$ tal que $\|f - g\| < (5/4)d$.
Sea $h = f - g$. Con los conjuntos

$$A = \{x\colon\ h(x) \le -\frac{3}{8}d\}, \quad B = \{x\colon\ h(x) \ge \frac{3}{8}d\}$$

que son cerrados y ajenos, por (5c) podemos tomar $h_1 \in \overline{\mathcal{F}}$ con

$$-\frac{3}{8}d \le h_1 \le \frac{3}{8}d, \quad h_1|_A = -\frac{3}{8}d, \quad h_1|_B = \frac{3}{8}d.$$

Entonces usando $\|h\| < (5/4)d$ y el hecho que
$|h| < 3d/8$ en $X - A \cup B$, tenemos

$$|h - h_1| \le \begin{cases} \left|-\frac{5}{4} - (-\frac{3}{8})\right| d = \frac{7}{8}d & \text{en } A, \\ 2 \cdot \frac{3}{8}d = \frac{6}{8}d & \text{en } X - (A \cup B), \\ \left|\frac{5}{4} - \frac{3}{8}\right| d = \frac{7}{8}d & \text{en } B. \end{cases}$$

Por eso tenemos $\|f - (g + h_1)\| = \|h - h_1\| < d$ con $g + h_1 \in \overline{\mathcal{F}}$, que es una contradicción de la definición de $d$. Por lo tanto $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. $\square$

Nota. ¿Por qué no se podía tomar $h_1 = \min(\max(h, -3d/8), 3d/8)$ y así evitar el paso (5)? Porque no sabemos que $h \in \overline{\mathcal{F}}$.

*13.4.* Corolario. 1. (Teorema de Aproximación de Weierstrass) Toda función continua en un intervalo $[a, b]$ es un límite uniforme de polinomios reales.

Demostración. Pongamos $X = [a, b]$, $\mathcal{F} = \{\text{polinomios reales}\}$ que es una subálgebra de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ con unidad y que separa puntos. $\square$

Corolario. 2. Sea $\varphi\colon [a, b] \to [a, b]$ una función continua estríctamente creciente, con $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = b$. Entonces el conjunto $\{p \circ \varphi\colon p$ es un polinomio real$\}$ es denso en $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Demostración. La operación $f \mapsto f \circ \varphi$ es un homeomorfismo de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ en sí mismo porque conserva la norma,

$$\|f \circ \varphi - g \circ \varphi\| = \|f - g\|.$$

Por lo tanto lleva a $\{\text{polinomios}\}$ a un conjunto denso. $\square$

Corolario. 3. El conjunto de polinomios trigonométricos

$$\{a_0 + \sum_1^n (a_k \cos kt + b_k \operatorname{sen} kt)\}$$

es denso en el conjunto $\{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua periódica con periodo $2\pi\}$.

Demostración. Usar $X = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, que es un espacio compacto. Hay que verificar que mencionado conjunto es un álgebra y que separa puntos. $\square$

Ahora veamos que la situación para funciones complejo-valuadas es diferente.

*13.5.* Ejemplo. Sea $X = \{x \in \mathbb{C}\colon\ |z| < 1\}$,
$\mathcal{F} = \{\text{polinomios con coeficientes complejos}\}$.
Si existiera $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ tal que $f_n(z) \to |z|$ uniformemente, entonces la función $z \mapsto |z|$ sería analítica (un teorema de Variable Compleja), lo cual no es cierto. Por lo tanto $\mathcal{F}$ no es denso en $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$. Esto muestra que la afirmación análoga al Teorema de Stone-Weierstrass con $\mathbb{C}$ en lugar de $\mathbb{R}$ no es válida.

Teorema de Stone-Weierstrass para polinomios complejos. Sea $X$ un espacio de Hausdorff compacto, y sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ una subálgebra con unidad que separa puntos y que sea cerrada bajo la conjugación compleja. Entonces $\mathcal{F}$ es un subconjunto denso en $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$.

Demostración. Consideremos $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F} \cap \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.
Notemos que $f \in \mathcal{F} \implies \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in \mathcal{F}_0$ porque estas funciones son

$$\frac{1}{2}(f + \overline{f}), \quad \frac{1}{2i}(f - \overline{f}).$$

Por ello sabemos que $\mathcal{F}_0$ separa puntos y es una subálgebra.
Por el Teorema de Stone-Weierstrass $\mathcal{F}_0$ es denso en $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.
Dado que cada $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ puede escribirse como
$f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f \in \mathcal{F}_0 + i \operatorname{Im} \mathcal{F}_0$, vemos que $\mathcal{F}$ es denso en $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$.
$\square$

*13.6.* Ejemplo. Sea $X = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| = 1\}$. Para $z \in X$, tenemos $z^{-1} = \overline{z}$.
Así se sugiere tomar

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}} &= \{\text{polinomios complejos en } z \text{ y en } z^{-1}\} \\ &= \{a_{-n}z^{-n} + a_{-n+1}z^{-n+1} + \cdots a_{-1}z^{-1} + a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n\}. \end{aligned}$$

Esta subálgebra es cerrada bajo conjugación.

Se puede escribir $z = re^{i\theta} = r\cos\theta + ir\operatorname{sen}\theta$,
luego $z^{-1} = re^{-i\theta} = r^{-1}\cos\theta - ir^{-1}\operatorname{sen}\theta$ (claro, $r = 1$).

Proposición. El conjunto de polinomios trigonométricos de dos lados

$$\{ \sum_{-n}^{n} a_k e^{i\theta k} \}$$

es denso en el conjunto $\{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ continua, y periódica con periodo } 2\pi\}$.