Análisis Funcional

Carlos G. Pacheco

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN

Departamento de Matemáticas

Octubre, 2023

Índice general

Capítulo 1

Espacios lineales normados

1.1. Espacios vectoriales

¿Qué es un espacio vectorial?

Definición 1.1.1. Un **e**spacio vectorial (o **l**ineal) sobre un campo $\mathbb{K}$ es un conjunto X con funciones:

$$(x, y) \mapsto x + y, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x,$$

para todos $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Dichas funciones cumplen lo siguiente:

i) $(\forall x, y, z \in X)$ $(x + y) + z = x + (y + z)$ (ley asociativa),
ii) $(\forall x, y \in X)$ $x + y = y + x$ (ley conmutativa),
iii) $\exists 0 \in X$ tal que $(\forall x \in X)$ $x + 0 = x$ (existencia del neutro aditivo),
iv) $(\forall x \in X)(\exists z \in X)$ $x+z = 0$ (existencia de inversos), a tal z lo denotamos $-x$,

v) $(\forall \lambda \in \mathbb{K})(\forall x, y \in X)$ $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (ley distributiva),
vi) $(\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K})(\forall x \in X)$ $(\lambda + \mu)x = \lambda + \mu x$ (ley distributiva),
vii) $(\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K})(\forall x \in X)$ $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ (ley asociativa), y
viii) $(1 \in \mathbb{K})(\forall x \in X)$ $1x = x$.

Nota 1.1.2. Un campo $\mathbb{K}$ es un anillo conmutativo con división, i.e. es un grupo abeliano.

En lo susesivo denotaremos con X un espacio vectorial.

Ejemplo 1.1.3.
(I) El espacio $\mathbb{C}^n$ de vectores en $\mathbb{C}$,

$$\left\{(t_i)_{i=1}^n : \ t_i \in \mathbb{C}\right\}.$$

Se puede verificar que $\mathbb{C}^n$ es un espacio vectorial con las operaciones naturales de suma y multiplicación por escalar. También es válido cuando $n = \infty$, es decir $\mathbb{C}^\infty$ denota el espacio de sucesiones en $\mathbb{C}$. Similarmente podemos formar espacios lineales por medio del espacio de matrices.
(II) El espacio

$$\left\{t \in \mathbb{C}^\infty : \ \lim_{n\to\infty} t_n \text{ existe}\right\}.$$

(III) El espacio

$$l_2 := \left\{t \in \mathbb{C}^\infty : \ \sum_{k=1}^{\infty} |t_k|^2 < \infty\right\}.$$

(IV) El espacio de funciones

$$\mathbb{C}^E := \{f : E \to \mathbb{C}\},$$

con E cualquier conjunto. Notemos que $\mathbb{C}^\infty = \mathbb{C}^E$ con $E := \{1, 2, \ldots\}$.
(V) Si E es un espacio topológico, entonces el espacio de funciones continuas,

$$C(E) := \left\{f \in \mathbb{C}^E : f \text{ es continua}\right\},$$

es lineal.
(VI) El espacio de funciones r veces diferenciables,

$$C^r([0,1]) := \left\{f \in C([0,1]) : d^k f/dx^k \text{ existe para } k = 1, 2, \ldots, r\right\}.$$

Definición 1.1.4. Un **subespacio vectorial** de un espacio vectorial X es $X_0 \subset X$ tal que

$$(\forall x, y \in X_0)(\forall \lambda \in \mathbb{K})\ x + \lambda y \in X_0.$$

Cuando $X_0 \subset X$ estrictamente decimos que es un **subespacio propio**.

Proposición 1.1.5. *Toda intersección arbitraria de subespacios vectoriales sigue siendo un subespacio vectorial.*

Definición 1.1.6. Sea $A \subset X$. El espacio $\langle A \rangle$ **generado** por A es la intersección de todos los subespacios vectoriales que contienen a A.

Nota 1.1.7. El conjunto vacio genera el espacio que consta únicamente del neutro aditivo, i.e. $\langle\{\emptyset\}\rangle = \{0\}$.

Definición 1.1.8. Una **combinación lineal** (comb.lin.) de $A \subset X$ es una suma finita $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$; con $n \in \mathbb{N}$, $\{x_i, i = 1, \ldots, n\} \subset A$ y $\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\} \subset \mathbb{K}$.

Teorema 1.1.9. *El conjunto de combinaciones lineales de A es un subespacio vectorial y coincide con $\langle A\rangle$.*

Ejemplo 1.1.10. Sea $\mathbb{C}^n$ el subconjunto de elementos $(x_i) \in \mathbb{C}^\infty$ tales que $x_i = 0$ para $i > n$. Entonces el subespacio $\langle \mathbb{C}^0 \cup \mathbb{C}^1 \cup \mathbb{C}^2 \cup \cdots \rangle$ no es igual a $\mathbb{C}^\infty$.

Definición 1.1.11. Sea Y subespacio de X. El **espacio conciente** se define como

$$X/Y := \{x + Y : x \in X\}.$$

Nota 1.1.12. Para $x_1, x_2 \in X$, podemos decir que x_1 está relacionado con x_2 ($x_1 \sim x_2$) si y solo si $x_1 - x_2 \in Y$. Así, el espacio cociente es el espacio X módulo la relación "$\sim$", i.e. $X/Y = X/\sim$. Con este punto de vista, al tomar representantes de cada clase de equivalencia uno puede verificar que el espacio cociente es efectivamente un espacio vectorial.

Definición 1.1.13. Un conjunto A es **linealmente independiente** (lin.ind.) si

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0, \text{ con } n \in \mathbb{N} \text{ y } \{x_i, i = 1, \ldots, n\} \subset A, \text{ con } x_i \neq x_j \text{ para } i \neq j$$

implica que $\lambda_i = 0$ para $i = 1, \ldots n$.

Definición 1.1.14. Una **base** (**de Hamel**) de X es un conjunto lin.ind. máximo.

Lema 1.1.15. *Si $A \subseteq X$ es un conjunto lin. ind., entonces $A \bigcup \{x\}$ es también lin.ind. cuando $x \notin \langle A\rangle$.*

Demostración. Sean $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ una comb.lin. de A. Si $A \bigcup \{x\}$ no fuera lin.ind., se tendría $\lambda x + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$ con $\lambda \neq 0$, luego

$$x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{-\lambda} x_i.$$

Lo cual significa que $x \in \langle A \rangle$, pero esto es una contradicción. $\square$

De este lema se sigue que

Corolario 1.1.16.
i) Si B es lin.ind. y $\langle B \rangle = X$, entonces B es una base.
ii) Si B es una base, entonces $\langle B \rangle = X$.

Para determinar la maximalidad de un conjunto lin.ind. (i.e. la existencia de una base) se ocupa el lema de Zorn, y para este resultado se asume el **Axioma de Elección**: *Toda colección de conjuntos no vacios admite una función que le asigna un elemento de el mismo a cada conjunto.* Otra afirmación equivalente es, *El producto cartesiano de cualquier familia no vacia es no vacio.*

Teorema 1.1.17. ***(Lema de Zorn)*** *Si X es un conjunto no vacio con orden parcial, en el cual todo subconjunto totalmente ordenado tiene una cota superior, entonces X tiene un elemento maximal, i.e. nadie domina a dicho elemento.*

En lo sucesivo X denota un espacio vectorial.

Teorema 1.1.18. *Sea $A \subset X$ con $\langle A \rangle = X$, entonces A contiene una base de X.*

Demostración. Sea $\mathcal{F} = \{B \subseteq A : B \text{ es lin.ind. }\}$ y considere cualquier $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ totalmente ordenado con la contención "$\subseteq$". Tomemos $E = \bigcup_{D \in \mathcal{E}} D$, luego $E \subseteq A$. Ahora, sea $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ una comb.lin. de E tal que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ hay un $D_i \in \mathcal{E}$ con $x_i \in D_i$. Por orden total de $\mathcal{E}$, podemos ordenar los D_i's, i.e. $D_{i_1} \subseteq \ldots \subseteq D_{i_n}$. Asi, $x_i \in D_{i_n}$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Pero como D_{i_n} es lin.ind., se tiene que $\lambda_i = 0$ para cada $i = 1, \ldots, n$, por lo tanto E es lin.ind. Como E es una cota superior de $\mathcal{E}$, usando el Lema de Zorn $\mathcal{F}$ tiene un elemento máximo B_0. Además, $\langle B_0 \rangle = \langle A \rangle$; de lo contrario dado $x \in \langle A \rangle - \langle B_0 \rangle$, la unión $B_0 \bigcup \{x\}$ sería lin.ind., contradiciendo la maximalidad del Lema de Zorn. $\square$

Teorema 1.1.19. *Sea $A \subset X$ lin.ind. y $B \subset X$ tal que $\langle A \bigcup B \rangle = X$. Entonces existe $B_0 \subseteq B$ tal que $A \bigcup B_0$ es una base de X.*

Demostración. Sea $\mathcal{F} = \{E \subseteq B : A \bigcup E \text{ es lin.ind. }\}$. Como en la demostración anterior, sea $\mathcal{E}$ una subfamilia totalmente ordenada y definase $E = \bigcup_{D \in \mathcal{E}} D$. Se ve que $E \subseteq B$. Ahora hay que verificar que $A \bigcup E$ es lin.ind.

Considerese una combinación lineal de la forma $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j = 0$, con a_i's en A y e_j's en E. Para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ hay $D_j \in \mathcal{E}$ con $e_j \in D_j$, y por el orden total de $\mathcal{E}$ los podemos order como $D_{j_1} \subseteq \ldots \subseteq D_{j_n}$, por lo que $e_j \in D_{j_n}$ para cada $j = 1, \ldots, n$. Asi, por ser $A \bigcup D_{j_n}$ lin.ind., se tiene que $\lambda_i = 0,\ i = 1, \ldots, n$ y $\mu_j = 0,\ j = 1, \ldots, m$. Luego, como E es una cota superior de $\mathcal{E}$, por el Lema de Zorn la familia $\mathcal{F}$ tiene un elemento máximo. Dicho elemento máximo genera X, de lo contrario se tendría una contradicción como en el teorema anterior. $\square$

Corolario 1.1.20.
Todo subconjunto A lin.ind. se puede extender a una base de X.

Teorema 1.1.21. *Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Si $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ es una base de X y si $A = \{a_1, \ldots, a_m\} \subset X$ es un conjunto lin.ind. entonces $m \leq n$.*

Demostración. Como B es una base, podemos escribir $a_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$ con algún $\lambda_{i_1} \neq 0$, por lo que podemos resolver para b_{i_1}. Luego entonces, tenemos que $\langle \{a_1\} \bigcup B - \{b_{i_1}\} \rangle = X$. Por el teorema anterior, hay $B_1 \subseteq B - \{b_{i_1}\}$ tal que $\{a_1\} \bigcap B_1$ es base de X. Así, tenemos que $|B_1| \leq n - 1$.

Similarmente, expresamos a_2 con $\{a_1\} \bigcap B_1$, luego para algún b_{i_2} se tiene que $\langle \{a_1, a_2\} \bigcap B_1 - \{b_{i_2}\} \rangle = X$. Entonces hay $B_2 \subseteq B_1 - \{b_{i_2}\}$ tal que $\{a_1, a_2\} \bigcup B_2$ es base de X, y $|B_2| \leq n - 2$.

Ahora supongamos que $m > n$. Continuando con el procedimiento, llegariamos a una base $\{a_1, \ldots, a_{n^*}\}$ de X con $n^* \leq n < m$, entonces $a_m \in \langle \{a_1, \ldots, a_{n^*}\} \rangle$, lo cual contradice la independencia lineal de A. $\square$

Corolario 1.1.22. *Sea $n < \infty$.*
i) Si X tiene una base con n elementos, entonces todo conjunto en X con más de n elementos no es lin.ind.
ii) Toda base tiene el mismo número de elementos.

Definición 1.1.23. Si alguna base de X tiene $n < \infty$ elementos, decimos que la **dimensión del espacio** es n. Si no hay tal n finita, decimos que el espacio de dimensión infinita.

Definición 1.1.24. Sea X y Y espacios vectoriales sobre el mismo campo $\mathbb{K}$. Una función $f : X \mapsto Y$ es **lineal** si

$$(\forall x_1, x_2 \in X)(\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K})\ f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Si además f es biyectiva le llamamos **isomorfismo**. También, definimos el **espacio nulo** de f como $f(0)^{-1} = \{x \in X : f(x) = 0\}$, denotado por $N(f)$.

Proposición 1.1.25. *Sea f lineal, entonces es inyectiva si y solo si $N(f) = \{0\}$.*

Definición 1.1.26. Sea X y Y espacios vectoriales sobre el mismo campo $\mathbb{K}$.
i) $\mathcal{L}^{\#}(X,Y) := \{f : X \mapsto Y \text{ lineales }\}$ (el conjunto de funciones lineales).
ii) $X^{\#} := \mathcal{L}^{\#}(X,\mathbb{K})$ (el conjunto de funcionales lineales).

En las siguientes proposiciones consideramos un espacio X de dimensión finita.

Proposición 1.1.27. *Si $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ es una base de X, entonces todo funcional $f \in X^{\#}$ es de la forma*

$$(\forall x \in X)\ f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i,\ \ con\ \{\mu_1, \ldots, \mu_n\} \subset \mathbb{K},$$

donde $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$.

Proposición 1.1.28. *$X^{\#}$ es un espacio vectorial con campo $\mathbb{K}$.*

Proposición 1.1.29. *Supongamos que $dim(X) < \infty$ y que $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ es una base. Entonces los funcionales $\{f_{b_1}, \ldots, f_{b_n}\}$ tales que*

$$(\forall x \in X)\ f_{b_j}(x) = \lambda_j,\ \ j = 1, \ldots, n\ \ donde\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i,$$

forman una base de $X^{\#}$.

Proposición 1.1.30. *Sea Y un subespacio propio de X. Si $x \in X - Y$ entonces existe $f \in X^{\#}$ tal que $f\mid_Y = 0$ y $f(x) = 1$.*

Demostración. Sea B_0 una base de Y, entonces $B_0 \bigcup \{x\}$ es un conjunto lin.ind., el cual se puede extende a una base de X. Luego podemos construir una tal f. $\square$

Ahora estudiaremos el celebre Teorema de Hahn-Banach que tendrá concecuencias imporantes en espacios normados.

Definición 1.1.31. Para todo $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Una función $p : X \mapsto [0, \infty)$,
i) es **sublineal** si $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$,
ii) es **homogenea** si $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$,
iii) es **positiva homogenea** si $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ para $\lambda > 0$.

Teorema 1.1.32. *(**Teorema de Hahn-Banach**) Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y Y un subespacio de X. Sea p una funcional de X sublineal y positivamente homogenea. Si $f \in Y^{\#}$ con $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in Y$, entonces existe $g \in \mathcal{L}^{\#}(X)$ tal que $(\forall x \in X) g(x) \leq p(x)$ y $f(y) = g(y)$ para todo $y \in Y$.*

Demostración. Sea $x \in X - Y$, queremos extender a f en $\langle Y \bigcup \{x\} \rangle$ y que siga siendo dominada por p. En efecto, se puede especificar el valor $g'(x)$ de tal manera que definiendo g' como $(\forall y \in Y)(\forall \lambda \in \mathbb{R}) g'(y + \lambda x) := f(y) + \lambda g'(x)$, la funcional g' cumpla lo deseado, es decir, que

$$(y \in Y)(\lambda \in \mathbb{R}) \ g'(y + \lambda x) = f(y) + \lambda g'(x) \leq p(y + \lambda x). \tag{1.1}$$

Verifiquemos esto.

Notemos que si $\lambda = 0$, la desigualdad (1.1) se cumple sin importar cual sea $g'(x)$. Por otro lado, si $\lambda > 0$ se debe cumplir que

$$g'(x) \leq p(y/\lambda + x) - f(y/\lambda).$$

Y si $\lambda < 0$, se debe cumplir que

$$g'(x) \geq \frac{1}{\lambda}(p(y + \lambda x) - f(y)) = -p(-y/\lambda - x) - f(y/\lambda).$$

Es decir,

$$-p(-y_2 - x) - f(y_2) \leq g'(x) \leq p(y_1 + x) - f(y_1) \text{ para todo } y_1, y_2 \in Y. \tag{1.2}$$

Sin embargo, observemos que para todo $y_1, y_2 \in Y$,

$$f(y_1) - f(y_2) = f(y_1 - y_2) \leq p(y_1 - y_2) = p(y_1 - y_2 + x - x) \leq p(y_1 + x) + p(-y_2 - x),$$

por lo que se puede obtener $g'(x)$ para que (1.2) se cumpla. Entonces hemos extendido a f con g' en $\langle Y \bigcup \{x\} \rangle$ y sigue dominado p.

Ahora podemos considerar

$$\mathcal{F} := \{h \in Z^{\#} : Z \text{ subespacio de } X,\ Y \subseteq Z,\ h\mid_Y = f,\ (\forall x \in Z) h(x) \leq p(x)\},$$

es decir, consideramos la familia de todos los funcionales lineales (sobre subespacios de X que contienen a Y) que satisfacen la propiedad deseada: que extiendan a f y sigan siendo dominados por p. Por la construcción anterior de g' sabemos que $\mathcal{F}$ no es vacio. Además, notemos que $\mathcal{F}$ tiene un orden parcial, a saber: decimos que h_2 domina a h_1 si $Dom(h_1) \subseteq Dom(h_2)$ y $h_2\mid_{Dom(h_1)} = h_1$. Se puede verificar también que cualquier subfamilia $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ totalmente ordenada tiene una cota superior en $\mathcal{F}$; esto se lleva a cabo construyendo $\mathcal{E}$ como en los Teoremas 1.1.18 y 1.1.19. Por el Lema de Zorn, $\mathcal{F}$ tiene un elemento maximal, llamemosle g. Si g no estuviera definido en todo X, podemos tomar $x \in X - Dom(g)$ y efectuar la extensión realizada en la primera parte de la demostración, pero esto contradice la maximalidad del Lema de Zorn. □

1.2. Espacios con norma

En lo sucesivo X denota un espacio vectorial.

Primero mencionamos lo que es una paranorma; esto generaliza el concepto de norma y es usado para dar topologias a espacios vectoriales donde talvez no es posible establecer una norma.

Definición 1.2.1. Una **paranorma** en X es una función $g : X \mapsto [0, \infty)$ tal que para todo $x, y \in X$
i) $g(0) = 0$,
ii) $g(x) = g(-x)$,
iii) $g(x + y) \leq g(x) + g(y)$ (sublineal),
iv) Sean $\{\lambda, \lambda_i, i = 1, 2, \ldots\} \subset \mathbb{C}$ y $\{x_i, i = 1, 2, \ldots\} \subset X$. Si $|\lambda_i - \lambda| \to 0$ y $g(x_i - x) \to 0$ cuando $i \to \infty$, entonces $g(\lambda_i x_i - \lambda x) \to 0$ cuando $i \to \infty$.
Se dice que g es **total** si $g(x) = 0$ implica que $x = 0$.

Nota 1.2.2. Si g es una paranorma, resulta que $d(x, y) := g(x - y)$ define una semi-métrica. Si además g es total, d es una métrica. En este curso nos enfocaremos en el uso de normas o seminormas

Definición 1.2.3. Sea g una paranorma en X y d definida en la nota anterior. Un conjunto $\{b_1, b_2, \ldots\}$ es una **base de Shauder** para X, si

$(\forall x \in X)(\exists\{\lambda_i, i = 1, 2. \ldots\} \subset \mathbb{K})$

$$d\left(x, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i\right) \to 0, \text{ cuando } n \to \infty.$$

Definición 1.2.4. Una **norma** en X es una función $\| \bullet \| : X \mapsto \mathbb{R}$ tal que
i) $\|x\| \geq 0$,
ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$,
iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,
iv) $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$.
(se llama **semi-norma** si i)-iii)).

Un **espacio lineal normado** (ELN) es un espacio vectorial dotado con una norma.

En general consideramos la bolas

- $B_r(a) := \{x \in X : \|x - a\| < r\}$,
- $\overline{B}_r(a) := \{x \in X : \|x - a\| \leq r\}$,
- $S_r(a) := \{x \in X : \|x - a\| = r\}$.

En el siguiente resultado se consideran los espacios producto $X \times X$ y $\mathbb{K} \times X$.

Proposición 1.2.5. *Sea X un ELN con campo $\mathbb{K}$.*
Las siguientes funciones son continuas:
$(x, y) \mapsto x + y$,
$(\lambda, x) \mapsto \lambda x$,
$(x, y) \mapsto \|x - y\|$,
$x \mapsto \|x\|$;
con $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K}$.

Nota 1.2.6. En un ELN X la oración "una serie absolutamente convergente es convergente" significa lo siguiente: Para $\{x_i, i = 1, 2, \ldots\} \subset X$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k \to x \text{ cuando } n \to \infty.$$

Proposición 1.2.7. *Sea X un ELN. Entonces X es completo si y solo si toda serie absolutamente convergente es convergente.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ con $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$. Sabemos que $(\forall \epsilon > 0)(\exists N < \infty) \sum_{k=n}^{\infty} \|x_k\| < \epsilon$ cuando $n > N$. Así,

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{m} x_k\right\| = \left\|\sum_{k=\text{mín}(n,m)+1}^{\text{máx}(n,m)} x_k\right\| \leq \sum_{k=\text{mín}(n,m)}^{\infty} \|x_k\|,$$

lo cual tiende a cero cuando $n, m \to \infty$. Entonces $\{\sum_{k=1}^{n} x_k\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, por lo tanto converge por ser X completo.

($\Leftarrow$) Sea $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ una sucesión de Cauchy. Para cada $k = 1, 2, \ldots$ tomemos n_k tal que si $n > n_k$ y $m > n_k$ se tenga que $\|x_n - x_m\| < 2^{-k}$. Sea $y_1 = x_{n_1}$, $y_2 = x_{n_2} - x_{n_1}$, $y_3 = x_{n_3} - x_{n_2}, \ldots$; luego $\sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\| < \infty$. Entonces, por hipótesis la serie es absolutamente convergente, y además $\sum_{k=1}^{m} y_k$ converge a un punto y cuando $m \to \infty$. Pero $\sum_{k=1}^{m} y_k = x_{n_m}$, por lo que $x_{n_m} \to y$ cuando $m \to \infty$. Como $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ es de Cauchy, también $x_k \to y$ cuando $k \to \infty$, por lo tanto X es completo. $\square$

Definición 1.2.8. Un **espacio de Banach** es ELN completo.

Dado un espacio con medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$, un ejemplo importante de espacio de Banach es $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ con $p \geq 1$.

Ahora presentamos un ejemplo dado por el espacio de funciones continuas.

Proposición 1.2.9. *Sea $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. El espacio $X := C[a, b]$, con la norma $\|x\|_\infty := \text{máx}_{t\in[a,b]} |x(t)|$, es de Banach.*

Demostración. Se puede ver que X es lineal y que $\|\cdot\|_\infty$ es norma. Probemos que X es completo. Sea $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\} \subset X$ es sucesión de Cauchy. Para cualquier $t \in [a, b]$, tenemos que $|x_n(t) - x_m(t)| \leq \|x_n - x_m\|_\infty$, por lo que $\{x_n(t)\}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$, luego $\text{lím}_{n\to\infty} x_n(t)$ existe para cada $t \in [a, b]$. Definamos $(\forall t \in [a, b]) x(t) := \text{lím}_{n\to\infty} x_n(t)$ y probemos que $\text{lím}_{n\to\infty} x_n = x$ con la norma en X y que $x \in X$.

Sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Sea N entero tal que $\|x_n - x_m\|_\infty < \epsilon/3$ cuando $n, m > N$. Así pues, $(\forall s \in [a, b])(\forall n, m > N)|x_n(s) - x_m(s)| < \epsilon/3$. Tomando el límite cuando $m \to \infty$ obtenemos que $(\forall s \in [a, b])|x_n(s) - x(s)| \leq \epsilon/3$, en otras palabras $(\forall n > N)\|x_n - x\|_\infty \leq \epsilon/3$. Por lo tanto $\|x_n - x\|_\infty \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Como x_N es continua y $[a,b]$ es cerrado, x_N es uniformemente continua, i.e. existe $\delta > 0$ tal que $|x_N(t) - x_N(s)| \leq \epsilon/3$ cuando $|s-t| < \delta$. Por la desigualdad del triangulo

$$|x(s) - x(t)| \leq |x(s) - x_N(s)| + |x_N(s) - x_N(t)| + |x_N(t) - x(t)|,$$

por lo que podemos concluir que $|x(s) - x(t)| < \epsilon$ cuando $|s-t| < \delta$, por lo tanto x es continua. □

Cuando A es un espacio topológico se puede intentar extender este resultado a alguna clase de funciones $f : A \to \mathbb{R}$ continuas y que sean acotadas con la norma del supremo.

Nota 1.2.10. Usando la norma $\|x\|_2 := \sqrt{\int_a^b x^2(t)dt}$, el espacio $C([a,b])$ no es completo.

Veamos que ocurre con los espacios cocientes.

Teorema 1.2.11. *Sea Y subespacio cerrado de un ELN X. Entonces X/Y es un ELN con la norma*

$$\|x + Y\| := \inf_{y \in Y} \|x - y\|. \tag{1.3}$$

Demostración. Ya se sabe que X/Y es espacio vectorial. Ahora hay que verificar que (1.3) define una norma. Claramente es positiva. Ahora, para todo $x, x' \in X$ se tiene que

$$\|(x+Y) + (x'+Y)\| = \|x + x' + Y\|$$

$$\leq \inf_{y \in Y} \|x + y\| + \inf_{y' \in Y} \|x' + y'\| = \|x + Y\| + \|x' + Y\|.$$

Para ver la desigualdad anterior, notemos que para cualquier $y' \in Y$,

$$\|x + x' + Y\| = \inf_{y} \|x + x' + y + y'\| \leq \|x' + y'\| + \inf_{y} \|x + y\|,$$

y luego podemos tomar el ínfimo sobre $y' \in Y$ en ambos lados.

Similarmente se tiene que $\|\lambda(x+Y)\| = |\lambda|\|x+Y\|$. También se tiene que

$$\|x + Y\| = 0 \Leftrightarrow (\exists \{y_i\}_{i=1}^{\infty} \subset Y)\|x + y_n\| \to 0 \text{ cuando } n \to \infty$$

$$\Leftrightarrow x \in Y(\text{ por ser } Y \text{ cerrado }) \Leftrightarrow x + Y = 0 + Y.$$

□

Teorema 1.2.12. *Con las hipótesis del teorema anterior, si además X es de Banach, también el cociente lo es.*

Demostración. Sea $\{x_j + Y\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en X/Y, entonces existe una subsucesión $\{x_{j_k} + Y\}_{k=1}^{\infty}$ tal que

$$\|(x_{j_k} + Y) - (x_{j_{k+1}} + Y)\| < 2^{-k},\ k = 1, 2, \ldots .$$

Sea $z_1 = x_{j_1}$ y defina $z_{k+1} \in x_{j_{k+1}} + Y$ tal que $\|z_{k+1} - z_k\| < 2^{-k}$. Por la desigualdad del triangulo, si $m < n$, $\|z_m - z_n\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}$. Así, $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ es de Cauchy en X, entonces $z_k \to z$ cuando $k \to \infty$, lo cual implica que $z_k + Y \to z + Y$. Por lo tanto X/Y es completo, luego de Banach. □

Proposición 1.2.13. *Todo subespacio de dimensión finita de un ELN es cerrado.*

El siguiente resultado resulta ser de gran utilidad en ELN.

Lema 1.2.14. ***(Lema de Riesz)*** *Sea Y un subespacio propio y cerrado de un ELN X. Sea $0 < \lambda < 1$, entonces existe $x \in X$ con $\|x\| = 1$ y tal que $\inf_{y \in Y} \|x - y\| \geq \lambda$.*

Demostración. Sea $x_0 \in X - Y$ y sea $d := \inf_{y \in Y} \|x_0 - y\|$. Por ser cerrado Y, se tiene que $d > 0$. Tomemos $y_0 \in Y$ tal que $0 < \|x_0 - y_0\| < \frac{d}{\lambda}$ y defina $x = \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|}$, el cual cumple lo deseado. □

Intuitivamente, el Lema de Riesz nos dice que para todo $\lambda \in (0, 1)$, siempre hay un elemento en $S_1(0)$ (frontera de la esfera) cuya distancia mínima a Y es al menos λ.

Lo siguiente da un criterio para determinar la dimensión de un ELN.

Teorema 1.2.15. *La bola unitaria $\overline{B}_1(0)$ en un ELN X es compacta si y solo si* $\dim(X) < \infty$.

Demostración. ($\Leftarrow$) Esto es el Teorema de Heine-Borel.
($\Rightarrow$) Supongamos que $\overline{B}_1(0)$ es compacto, y supongamos que $\dim(X) = \infty$. Tomemos $x_1 \in S_1(0) \subset X$, y $X_1 := \langle\{x_1\}\rangle$ el cual es de dimensión finita, luego cerrado. Por el Lema de Riesz, tomemos $x_2 \in S_1(0)$ con $\|x_2 - X_1\| \geq \frac{1}{2}$. Sea $X_2 := \langle\{x_1, x_2\}\rangle$; nuevamente por el Lema de Riesz, existe $x_3 \in S_1(0)$ con $\|x_3 - X_2\| \geq \frac{1}{2}$. Y así sucesivamente, como suponemos que $\dim(X) = \infty$, obtenemos $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset S_1(0)$ con $\|x_j - x_i\| \geq 1/2$ con $j \neq i$. Por lo que $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ no tendría subsucesión convergente, contradiciendo el hecho de que $\overline{B}_1(0)$ es compacto. □

Definición 1.2.16. Dos normas $\| \bullet \|_1$ y $\| \bullet \|_2$ en un espacio vectorial X se llaman **equivalentes** si existe $c > 0$ tal que para todo $x \in X$ se tiene

$$\frac{1}{c}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c\|x\|_1.$$

Proposición 1.2.17. *Si la dimensión de un ELN es finita, entonces todas las normas son equivalentes.*

En lo sucesivo X y Y son ELNs sobre el mismo campo $\mathbb{K}$.

Definición 1.2.18. Una transformación lineal $T \in \mathcal{L}^{\#}(X, Y)$ se llama **acotada** si existe $c > 0$ tal que $(\forall x \in X)\|T(x)\| \leq c\|x\|$, y su **norma** se define como

$$\|T\| := \sup_{x \in X - \{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$$

. El conjunto de **transformaciones lineales acotadas** de X a Y lo denotamos como $\mathcal{L}^*(X, Y)$ o $\mathcal{L}(X, Y)$. Si hablamos de funcionales acotados podemos usar la notación X^*.

Vemos que en espacios de dimensión finita, todos los operadores lineales son acotados.

Proposición 1.2.19.
i) Se cumplen las siguientes igualdades

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = \inf\{c : (\forall x \in X)\|T(x)\| \leq c\|x\|\}.$$

ii) Para todo $x \in X$, $\|T(x)\| \leq \|T\| \times \|x\|$.
iii) Si $X = Y$, $\|T^n\| \leq \|T\|^n$, donde T^n es la $n-$ésima composición de T.

Teorema 1.2.20. *Sean X, Y ELNs. Se tiene que $T \in \mathcal{L}^{\#}(X, Y)$ es acotado si y solo si T es un mapeo continuo.*

Demostración. Si T es continua, en particular es continua en $0 \in X$ (neutro de X). Luego

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)\|x - 0\| \leq \delta \Rightarrow \|T(x) - T(0)\| \leq \epsilon;$$

en particular para $\epsilon = 1$. Si $x \in X$ es de norma 1, $\|\delta x\| = \delta$, luego $\|T(\delta x)\| \leq 1$. Así, $\|Tx\| \leq 1/\delta < \infty$ para todo x de norma 1, por la proposición anterior T es acotado.

Supongamos que T es acotado. Tenemos que hay $M < \infty$ tal que para todo $x, y \in X$ con $x - y \neq 0$

$$\frac{\|T(x-y)\|}{\|x-y\|} \leq M.$$

Luego $\|T(x) - T(y)\| \leq M\|x-y\|$, por lo tanto T es continua. □

Ejemplo 1.2.21. Un operador integral en $(C[0,1], \| \bullet \|_\infty)$ donde el núcleo $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{K}$ es función continua define un operador acotado.

Teorema 1.2.22.
i) Con la norma $T \mapsto \|T\|$, el conjunto $\mathcal{L}^*(X,Y)$ es un ELN.
ii) Si Y es completo, $\mathcal{L}^*(X,Y)$ es de Banach.

Demostración. Sean $T_1, T_2 \in \mathcal{L}^*(X,Y)$, entonces

$$\|T_1 + T_2\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_1(x) + T_2(x)\| \leq \sup_{\|x\|=1} (\|T_1(x)\| + \|T_2(x)\|) \leq \|T_1\| + \|T_2\|,$$

y también $\|\lambda T_1\| = |\lambda| \|T_1\|$. Claramente $\|T\| = 0$ si $(\forall x \in X) T(x) = 0 \in Y$; y si $\|T\| = 0$ entonces $(\forall x \in X)\|T(x)\| = 0$, lo cual implica que $(\forall x \in X) T(x) = 0$, pues $\| \cdot \|$ es norma en Y. Hemos pues mostrado que la función $\| \cdot \|$ en $\mathcal{L}^*(X,Y)$ es efectivamente una norma.

Se puede ver fácilmente que $\mathcal{L}^*(X,Y)$ es espacio lineal. Verifiquemos entonces que es completo para ver que es de Banach.

Sea $\{T_n, n = 1, 2, \ldots\} \subset \mathcal{L}^*(X,Y)$ sucesión de Cauchy. Para cada $x \in X$, $\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\|$, luego $\{T_n(x), n = 1, 2, \ldots\}$ es sucesión de Cauchy en Y, y como Y es completo, el límite $T(x) := \lim_{n\to\infty} T_n(x)$ está bien definido para cada $x \in X$. Por la linealidad de cada T_n,

$$(\forall x, y \in X)(\forall \alpha \in \mathbb{K}) T_n(\alpha x + y) = \alpha T_n(x) + T_n(y).$$

Tomando el límite cuando $n \to \infty$, llegamos a $T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y)$, por lo tanto T es lineal.

Probemos ahora que T es acotada. Notemos que $\|T_n\| \leq \|T_n - T_m\| + \|T_m\|$, y lo mismo intercambiando n y m, por lo que

$$|\|T_n\| - \|T_m\|| \leq \|T_n - T_m\|,$$

luego $\{\|T_n\|\}_{n=1}^\infty$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$. Esto implica que hay $M < \infty$ tal que $\|T_n\| < M$ para toda n, entonces $(\forall n = 1, 2, \ldots)(\forall x \in X)\|T_n(x)\| \leq M\|x\|$.

Como la norma es una función continua, tomando el límite cuando $n \to \infty$ llegamos a $\|T(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n(x)\| \leq M\|x\|$ para toda $x \in X$, luego T es acotada.

Para terminar, sea $\epsilon > 0$ y $N > 0$ tal que $\|T_n - T_m\| \leq \epsilon$ cuando $n, m \geq N$. Entonces, si $\|x\| = 1$, también $\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \epsilon$. Y por la continuidad de la norma $\|T_n(x) - T(x)\| = \lim_{m\to\infty} \|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \epsilon$ para todo $x \in X$ de norma uno. Podemos concluir que $T_n \to T,\ n \to \infty$ en $\mathcal{L}^*(X, Y)$. □

Con lo anterior podemos mostrar el siguiente resultado que se tiene en teoría de matrices y que originalmente es la idea de una serie geométrica en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Teorema 1.2.23. ***(de Neumann)*** *Sea X un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}^*(X)$. Si $\|T\| < 1$, entonces $I - T$ es invertible, i.e. existe $A \in \mathcal{L}^*(X)$ tal que $(I - T)A = A(I - T) = I$. Más aún, podemos calcular A con la* ***serie de Neumann***

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} T^k.$$

Demostración. Definamos $A_n := \sum_{k=0}^{n} T^k$ para $n = 0, 1, \ldots$. Se puede verificar que cada A_n es lineal y acotada. Para $n > m$ tenemos que

$$\|A_n - A_m\| = \|\sum_{k=m+1}^{n} T^k\| \leq \sum_{m+1}^{n} \|T\|^k = \frac{\|T\|^{m+1} - \|T\|^{n+1}}{1 - \|T\|}.$$

Como $\|T\|^m \to 0$ cuando $m \to \infty$, $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathcal{L}^*(X)$. Por el teorema anterior hay $A \in \mathcal{L}^*(X)$ con $A_n \to A$ si $n \to \infty$.

Así tenemos que $(I - T)A_n = \sum_{k=0}^{n} T^k - T\sum_{k=0}^{n} T^k = I - T^{n+1}$. Por lo que $\|(I - T)A_n - I\| \to 0$ cuando $n \to \infty$, luego $(I - T)A = I$. Similarmente $A(I - T) = I$. Podemos entonces concluir $A = (I - T)^{-1}$. □

Ejemplo 1.2.24. Sea $X := C[0, 1]$ y $k : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua. Si $\sup_{s,t\in[0,1]} |k(s, t)| < 1$, entonces del Teorema de Neumann sabemos que $I - T$ es invertible, donde T el operador integral con núcleo k. El inverso puede ser calculado teóricamente con la serie de Neumann. Así, podemos encontrar la incongnita $x \in X$ del la ecuación

$$x(t) - \int_0^1 k(s, t)x(s)ds = v(t),\ t \in [0, 1],$$

donde $v \in X$ es conocido. Esto es, resolvemos $x - Tx = v$, mediante $x = (I - T)^{-1}v$.

Veamos por ultimo unos corolarios del Teorema de Hahn-Banach.

Corolario 1.2.25. *Sea Y subespacio de X (ELN). Entonces todo $f \in Y^*$ se extiende a $g \in X^*$ con $\|g\| = \|f\|$.*

Demostración. Defina $p(x) = \|f\| \, \|x\|$. Por el teorema de Hahn-Banach, existe $g \in X^{\#}$ con $(\forall x \in X) g(x) \leq p(x)$, de donde $\|g\| \leq \|f\|$. □

Corolario 1.2.26. *Sea Y un subespacio de X (ELN). Sea $a \in X$ tal que $d := dist(a, Y) > 0$, entonces existe $g \in X^*$ con $g\,|_Y = 0$, $g(a) = d$ y $\|g\| = 1$.*

1.3. Espacios duales

Ahora estudiaremos en más detalle el espacio X^* el cual es llamado el espacio **dual** de X. Por el Teorema 1.2.22 este espacio es de Banach, y resulta ser útil para analizar el mismo espacio X.

Recordemos primero esta definición.

Definición 1.3.1. Un **isomorfismo isométrico** entre dos espacios vectoriales normados es una transformación lineal biyectiva que preserva normas.

Representación de espacios duales

En un espacio con medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ uno puede demostrar que el espacio dual de L_p es realmente L_q, donde $p > 1$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; y de hecho las funcionales son integrales. Demostraremos este hecho para el caso particular donde el dominio de las funciones es un conjunto discreto.

Teorema 1.3.2. *Sea $1 < p < \infty$, y q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se tiene que l_p^* es isométricamente isomorfo a l_q.*

Demostración. Fijamos $b = \{b_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_q$ y definimos $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x_k$ para todo $x \in l_p$. Por la desigualdad de Hölder

$$|f(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |b_k x_k| \leq \left(\sum |b_k|^q\right)^{1/q} \left(\sum |x_k|^p\right)^{1/p} = \|b\|_q \|x\|_p < \infty,$$

así $f(x) \in \mathbb{C}$ está bien definida para todo $x \in l_p$, por lo que $f_b \in l_p^*$ y satisface $\|f\| \leq \|b\|_q$.

Tenemos pues una transformación $T : l_q \to l_p^*$ lineal, además $T(b) = 0$ para $b \in l_q$ implica que $(\forall x \in l_p) T(b)(x) = 0$, luego $b_k = 0$ para $k = 1, 2, \ldots$, por lo que T es inyectiva.

Queremos ver ahora que T es sobre. Sea pues $f \in l_p^*$ y defina $b_k := f(\delta_k)$, donde δ_k es la sucesión de ceros con un 1 en la posición $k-$esima. Sea la transformación $Trunc_n$ definida como

$$Trunc_n(x) := \begin{cases} x_k & k \leq n \\ 0 & k > n. \end{cases}$$

Como $Trunc_n(x) \overset{n\to\infty}{\to} x$ tenemos que $f \circ Trunc_n$ es continua, por lo que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(Trunc_n(x)) = \lim_{n\to\infty} f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \delta_k\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k b_k$$

para todo $x \in l_p$. Ahora definamos $a := \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $a_k b_k = |a_k|^p$ para $k = 1, 2, \ldots$ y notemos que $|a_k|^p = |a_k|^{-q(1-p)} = |b_k|^q$. Luego para toda n se tiene $\sum^n |a_k|^p = \sum^n a_k b_k = f(Trunc_n(a))$, y también

$$|f(Trunc_n(a))| \leq \|f\| \|Trunc_n(a)\|_p = \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p}.$$

Por lo tanto $\|f\| \geq \left(\sum^n |a_k|^p\right)^{1-1/p} = \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q}$ para todo n, lo cual implica que $a \in l_p$ y $b \in l_q$. Así $f = T(b)$ y $\|b\|_q \leq \|f\|$, entonces finalmente T es sobre y preserva normas, por lo tanto es un isomorfismo isométrico. □

Y para completar veamos el caso $p = 1$.

Teorema 1.3.3. *l_1^* es isométricamente isomorfo a l_∞.*

Demostración. Defina $T : l_\infty \to l_1^*$ como $T(b) := f$, donde $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x_k$ para $x \in l_1$. Veamos que $|f(x)| \leq \sup_{k\geq 1} |b_k| \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \|b\|_\infty \|x\|_1$ para $x \in l_1$, por lo que f es lineal y acotado, y se cumple $\|f\| \leq \|b\|_\infty$.

También, dado $f \in l_1^*$, sea $b_k := f(\delta_k)$ para $k = 1, 2, \ldots$. Como $|b_k| = |f(\delta_k)| \leq \|f\| \|\delta_k\|_1 = \|f\|$ se sigue que $\|b\|_\infty \leq \|f\|$. Así, T es biyectiva y preserva normas, luego es un isomorfismo isométrico. □

Que pasará con el dual de l_∞? es decir, dado el teorema anterior, con el dual del dual de l_1; podemos preguntarnos por la relación de este doble dual con el espacio l_1. Esto será el tema de la próxima sección. Por lo pronto tenemos lo siguiente teorema. Sea

$$c_0 := \{\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} : x_i \to 0,\ i \to \infty\}$$

dotado con norma $\| \bullet \|_\infty$. Se sabe que c_0 es subespacio de l_∞, veamos que ocurre con el dual de c_0.

Teorema 1.3.4. *Considere el espacio c_0 con norma $\| \bullet \|_\infty$. Entonces c_0^* es isométricamente isomorfo a l_1.*

Demostración. Definamos $T : l_1 \to c_0^*$ como $T(b) = f$ donde $f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} b_k x_k$ para $x \in c_0$. Se observa que $|f(x)| \leq \|b\|_1 \|x\|_\infty$. También, dado $f \in c_0^*$ sea $b_k := f(\delta_k)$. Con el mapeo $Trunc_n$, efectuamos el mismo argumento que en el Teorema 1.3.2 para ver que $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k b_k$.

Definimos $a := \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $a_k b_k = |b_k|$, luego

$$\sum_{k=1}^{n} |b_k| = \sum_{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k f(\delta_k) = f(Trunc_n(a)).$$

Puesto que $|f(Trunc_n(a))| \leq \|f\| \|a\|_\infty = \|f\|$ para toda n, entonces $\|b\|_1 \leq \|f\|$. Así T es biyectiva e isometría. $\square$

Pasemos ahora a estudiar el dual de funciones continuas.

Definición 1.3.5. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.
i) La **variación total** de f se define como

$$V(f) := \sup_{\{t_1,\ldots,t_{n+1}\} \subset \Pi} \left\{ \sum_{i=1}^{n} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \right\},$$

donde Π es el conjunto de todas las particiones de $[0,1]$.
ii) La función f es de **variación acotada** si $V(f) < \infty$.
iii) Se define $BV[0,1] := \{$*todas las* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de variación acotada$\}$.

Proposición 1.3.6. *Para $f \in BV[0,1]$,*
i) el valor $f(0) + V(f)$ define una norma en $BV[0,1]$,
ii) y para todo $t \in [0,1]$, los límites $f(t^-)$ y $f(t^+)$ existen, lo cual implica que la colección de discontinuidades es numerable.

Nota 1.3.7. Para $g \in BV[0,1]$ se puede definir la **integral de Riemann-Stieltjes** de un función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua con respecto a g como

$$\int_0^1 f dg := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(t_i^{(n)})(g(t_i^{(n)}) - g(t_{i-1}^{(n)})),$$

donde $\{t_i^{(n)}\}_{i=0}^{n} \in \Pi$, $n = 1, 2, \ldots$ tal que $\max_{1\le i\le n} |t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Dicha integral existe y es única.

Teorema 1.3.8. *(Teorema de Representación de Riesz) Sea $F \in C[0,1]^*$, entonces existe $g \in BV[0,1]$ tal que $(\forall f \in C[0,1])F(f) = \int_0^1 f dg$ y $\|F\| = V(g)$.*

Demostración. Sea $A[0,1] :=$ { funciones acotadas en $[0,1]$}, dotado con la norma del supremo. Resulta que $A[0,1]$ es un ELN que contiene a $C[0,1]$. Por el Teorema de Hahn-Banach, existe $\tilde{F} \in A[0,1]^*$ tal que $\tilde{F}\,|_{C[0,1]}= F$ y $\|\tilde{F}\| = \|F\|$. Sea

$$I_t(s) := \begin{cases} 1 & 0 \le s \le t \\ 0 & t < s \le 1, \end{cases}$$

luego $I_t(\bullet) \in A[0,1]$ para cada $t \in [0,1]$. Definase pues $g(t) = \tilde{F}(I_t),\ t \in [0,1]$.

Para cualquier partición $\{t_0^{(n)}, \ldots, t_0^{(n)}\} \in \Pi$ definase $\lambda_i^{(n)} = -1$ ó 1, de tal manera que $\lambda_i^{(n)}(g(t_i^{(n)}) - g(t_{i-1}^{(n)})) = |g(t_i^{(n)}) - g(t_{i-1}^{(n)})|$. Así,

$$\sum_{i=1}^{n} |g(t_i^{(n)}) - g(t_{i-1}^{(n)})| = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(n)} (\tilde{F}(I_{t_i^{(n)}}) - \tilde{F}(I_{t_{i-1}^{(n)}}))$$

$$\tilde{F}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(n)} (I_{t_i^{(n)}} - I_{t_{i-1}^{(n)}})\right) \le \|\tilde{F}\| \left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(n)} (I_{t_i^{(n)}} - I_{t_{i-1}^{(n)}})\right\|_\infty = \|F\|,$$

por lo tanto $g \in BV$ y $V(g)]leq\|F\|$.

Para $f \in C[0,1]$ tenemos que

$$|F(f)| = |\tilde{F}(f)| = \left\|\tilde{F}\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(i/n)(I_{i/n} - I_{(i-1)/n})\right)\right\|$$

$$= |\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(i/n)(g(i/n) - g((i-1)/n))| \le \|f\|_\infty V(g),$$

por lo que $\|F\| \le V(g)$, o sea que $\|F\| = V(g)$. De estos últimos hechos también se desprende que $F(f) = \int_0^1 f dg$ para toda $f \in C[0,1]$. □

Definición 1.3.9.

$$BVN[0,1] := \{g \in BV[0,1] : g(0) = 0, (\forall t \in [0,1])g(t) = g(t^+)\}.$$

Nota 1.3.10. Si $g \in BV[0,1]$ definase

$$g_0(t) := \begin{cases} 0 & t = 0 \\ g(t^+) - g(0) & 0 < t < 1 \\ g(1) - g(0) & t = 1. \end{cases}$$

Así, $g_0 \in BVN[0,1]$ y $\int_0^1 f dg_0 = \int_0^1 f dg$ para toda $f \in C[0,1]$.

Teorema 1.3.11. *$C[0,1]^*$ es isométricamentes isomorfo a $BVN[0,1]$.*

Demostración. Defina $T : BVN[0,1] \to C[0,1]^*$ como $g \mapsto \int \bullet dg$. Dicha transformación es lineal y por el teorema anterios es sobreyectiva e isometría, solo falta verificar que es inyectiva.

Tomemos $s \in [0,1]$ y $\epsilon \geq 0$ tal que $s + \epsilon \leq 1$. Ahora defina la función continua

$$f(t) := \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq s \\ 0 & s + \epsilon \leq t \leq 1 \\ en\ [s, s+\epsilon] \text{ linea recta que une } 0\ y\ 1. \end{cases}$$

Pensemos que hay g tal que $(\forall h \in C[0,1])T_g h = \int h dg = 0$. En particular, $T_g f = 0$. Veamos que de hecho g tiene que ser 0. Luego, usando propiedades de la integral de Riemann-Stieltjes,

$$0 = g(s) - g(0) + \int_s^{s+\epsilon} f(t)dg(t) = g(s) + f(s+\epsilon)g(s+\epsilon) - f(s)g(s) - \int_s^{s+\epsilon} g(t)df(t)$$

$$= g(s) + f(s+\epsilon)g(s+\epsilon) - f(s)g(s) - \int_s^{s+\epsilon} g(t)f'(t)dt = \frac{1}{\epsilon}\int_s^{s+\epsilon} g(t)dt,$$

lo cual converge a $g(s^+)$ cuando $\epsilon \to 0$. Por lo tanto $g(s) = 0$ para toda $s \in [0,1]$. □

Espacios doble-dual

Una herramienta importante para el estudio de espacios doble-duales (i.e. el dual del dual) es la función evaluación, definida a continuación.

Definición 1.3.12. Sea X un espacio lineal sobre un campo $\mathbb{K}$. La **función evaluación** $eval : X \to \left(X^{\#}\right)^{\#}$ es tal que para cada $x \in X$ fijo $eval_x(\bullet) := [eval\ x](\bullet)$ actúa sobre $X^{\#}$ de la siguiente forma

$$eval_x(f) := f(x).$$

Es decir, $eval_x : X^{\#} \to \mathbb{K}$ evalúa cada elemento $f \in X^{\#}$ en el punto x.

Nota 1.3.13. Cuando X es un ELN resulta que la imagen de $eval$ está en $(X^*)^*$:

$$\|eval_x\| = \sup_{\|f\|\leq 1} |eval_x(f)| = \sup_{\|f\|\leq 1} |f(x)| \leq \sup_{\|f\|\leq 1} \||f\|\|x\| = \|x\|.$$

En lo sucesivo usaremos la notación $X^{\#\#}$ y X^{**}, y X será un ELN.

Teorema 1.3.14. *En un ELN se tiene que la transformación eval es lineal, inyectiva y preserva normas, además $\|eval\| = 1$.*

Demostración. La linealidad es fácil verificarla. Para la inyectividad tomemos $x, y \in X$ tal que $x \notin \langle\{y\}\rangle$. Por el Corolario 1.2.26, existe $g \in X^*$ con $g(y) = 0$ y $g(x) \neq 0$, luego $eval_x \neq eval_y$. Ahora, si $x \in \langle\{y\}\rangle$ pero son diferentes, cualquier funcional acotada g que no se anule en y hace que $g(x) \neq g(y)$, luego $eval_x \neq eval_y$.

(isometría) Sea $x \in X - \{0\}$. Otra vez por el Corolario 1.2.26, existe $g \in X^*$ con $\|g\| = 1$ y $g(x) = \|x\|$, entonces $\|eval_x\| = \|x\|$.

Tenemos finalmente que

$$\|eval\| = sup_{\|x\|=1}\|eval_x\| = 1.$$

$\square$

Definición 1.3.15. Se dice que X es **reflexivo** si el mapeo $eval$ es sobreyectivo, y tenemos que $X^{**} = \{eval_x : x \in X\}$.

Ejemplo 1.3.16. Los espacios l_p con $1 < p < \infty$ son reflexivos, pero l_1 y l_∞ no lo son.

Definición 1.3.17.
i) El **aniquilador** de un conjunto $E \subseteq X$ es

$$E^{\perp} := \{f \in X^* : f\ |_E = 0\}.$$

ii) El **aniquilador unitario** de $E \subseteq X$ es

$$E^\circ := \left\{f \in E^\perp : \|f\| = 1\right\}.$$

iii) También definimos el **aniquildor del aniquilador** de $E \subseteq X$ como

$$E^{\perp\perp} := \left\{x \in X : (\forall f \in E^\perp) f(x) = 0\right\}.$$

iv) Y similarmente

$$E^{\circ\circ} := \left\{x \in E^{\perp\perp} : \|x\| = 1\right\}.$$

Nota 1.3.18. Cuando trabajamos con $E \subset X^*$ definimos

$$E^\perp := \{x \in X : (\forall f \in E) eval_x(f) = 0\},$$

y similarmente E°.

La primera observación es que $E^\perp$ es un subespacio lineal de X^*.

Lema 1.3.19. *Sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset X^*$ y $x \in X$. Si $f_n \to f$ cuando $n \to \infty$ para algún $f \in X^*$, entonces para cada $x \in X$ se tiene que $f_n(x) \to f(x)$ cuando $n \to \infty$.*

Demostración. Sabemos que $\|f_n - f\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Así,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|\|x\| \to 0, \ n \to \infty.$$

□

Nota 1.3.20. Del lema anterior se sige que $E^\perp$ y $E^{\perp\perp}$ son cerrados para cualquier $E \subseteq X$. Notemos también que $E \subseteq E^{\perp\perp}$.

Teorema 1.3.21. *Sea E subespacio de X, entonces $\overline{E} = E^{\perp\perp}$.*

Demostración. Ya sabemos que $\overline{E} \subseteq E^{\perp\perp}$. Tomemos $x \in X - \overline{E}$ y definamos f en $\langle \overline{E} \bigcup \{x\}\rangle$ como $f(y + \lambda x) = \lambda$ para $y \in \overline{E}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Note que

$$\|f\| = \sup\left\{\frac{|f(y+\lambda x)|}{\|y+\lambda x\|} : y + \lambda x \neq 0\right\} = \sup\left\{\frac{|f(y+x)|}{\|y+x\|} : y \in \overline{E}\right\}$$

$$= \frac{1}{\text{ínf}\{\|x+y\| : y \in \overline{E}\}}.$$

Lo cual es finito pues $x \notin X - \overline{E}$. Concluimos que f es acotada y por el Teorema de Hahn-Banach se extiende a una $F \in X^*$ con $F(x) = f(x) = 1$ y $F\mid_{\overline{E}} = 0$. Entonces $F \in E^{\perp}$ y $x \notin E^{\perp\perp}$, de donde $E^{\perp\perp} \subseteq \overline{E}$, luego $E^{\perp\perp} = \overline{E}$. □

Ahora tenemos un resultado que se aplica en los contextos de problemas de optimización. Sea Y subespacio propio de X y x fijo en X. Puede no existir $y_0 \in Y$ tal que $\|x - y_0\| = \operatorname{ínf}_{y \in Y} \|x - y\|$, pero siempre existe $f_0 \in Y^{\circ}$ que resuelve el **problema dual**:

$$f_0(x) = \sup_{f \in Y^{\circ}} |f(x)|.$$

Teorema 1.3.22. *Sea X un ELN sobre un campo $\mathbb{R}$ y Y subespacio propio de X. Sea $x \in X$ fijo, entonces hay $f_0 \in Y^{\circ}$ tal que*

$$\operatorname*{ínf}_{y \in Y} \|x - y\| = \sup_{f \in Y^{\circ}} |f(x)| = |f_0(x)|.$$

Demostración. Suponemos que $x \notin \overline{Y}$, de otro modo es trivial. Así, tenemos que $d := \operatorname{ínf}_{y \in Y} \|x - y\| > 0$. Sean $y_n \in Y$ tal que $\|x - y_n\| \to d$ cuando $n \to \infty$. Si $f \in Y^{\circ}$, $|f(x)| = |f(x - y_n)| \leq \|f\| \|x - y_n\| \leq \|x - y_n\|$, así que $|f(x)| \leq d$ y también $\sup_{f \in Y^{\circ}} |f(x)| \leq d$. Definamos f en $\langle Y \bigcup \{x\} \rangle$ como $f(y + \lambda x) = \lambda d$ para toda $y \in Y$ y toda $\lambda \in \mathbb{R}$. Notemos que

$$\|f\| = \sup \left\{ \frac{|\lambda d|}{\|y + \lambda x\|} : y \in Y,\ \lambda \in \mathbb{R} - 0 \right\} = \frac{d}{\operatorname{ínf}_{y \in Y} \|x + y\|} = 1.$$

Por el Teorema de Hahn-Banach, f se extiende a $f_0 \in X^*$ con $\|f_0\| = 1$, $f_0(x) = d$ y $f_0\mid_Y = 0$; luego $f_0 \in Y^{\circ}$. Por lo tanto $\sup_{f \in Y^{\circ}} |f(x)| \geq d$, entonces $\sup_{f \in Y^{\circ}} |f(x)| = d$ □

1.4. Concecuecias en espacios de Banach

El hecho de que un ELN sea completo trae consigo concecuencias importantes. Para estudiar esto primero presentamos el celebre Teorema de Baire el cual será el detonador de varios resultados.

Teorema 1.4.1. ***(Teorema de Baire)*** *En un espacio métrico y completo X, la intersección contable de conjuntos abiertos y densos sigue siendo denso.*

Demostración. En X, sea $\{U_n, n = 1, 2, \ldots\}$ una sucesión de conjuntos abiertos y densos, y B un abierto arbitrario. Así, existe $x_1 \in X$ y $\epsilon_1 > 0$ tal que $\overline{B}_{\epsilon_1}(x_1) \subseteq B \bigcap U_1$. También existe $x_2 \in X$ y $\epsilon_2 > 0$ tal que $\overline{B}_{\epsilon_2}(x_2) \subseteq \overline{B}_{\epsilon_1}(x_1) \bigcap U_2$, y así sucesivamente. Luego, $\left\{\overline{B}_{\epsilon_i}(x_i)\right\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de cerrados. Por el Teorema de Cantor de conjuntos anidados, $\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{B}_{\epsilon_i}(x_i) \neq \emptyset$. Así, $B \bigcap (\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n) \neq \emptyset$, por lo tanto $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ es denso. $\square$

Corolario 1.4.2. *Sea X un espacio métrico completo. Supongamos que X se expresa como un unión numerable de conjuntos cerrados, entonces al menos uno tiene interior no vacio.*

Demostración. Supongamos que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ (i.e. $X - \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$) donde $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ son conjuntos cerrados con interior vacio. Así pues, $O_n = X - F_n$ son abiertos y densos. Por el Teorema de Baire, $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ es denso, y en particular no vacio. Pero si $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$, entonces $x \in X - \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, lo cual es una contradicción. $\square$

Definición 1.4.3. En un espacio topológico, un conjunto es de **primera categoría** si se puede expresar como una unión contable de conjuntos nunca densos. Un conjunto es de **segunda categoría** si no es de primera categoría.

Nota 1.4.4. Hay que tener presente que en espacios métricos puede ser que $\overline{B}_{\epsilon}(x) \subset \{y : d(x, y) \leq \epsilon\}$ estrictamente, o reescrito en otra forma esto es

$$\overline{\{y : d(x, y) < \epsilon\}} \neq \{y : d(x, y) \leq \epsilon\}.$$

Sin embargo, si el espacio esta dotado de una norma se tiene la igualdad de estos conjuntos.

El siguiente teorema se remonta al resultado de Hellinger y Toeplitz (1910) en espacios l_2.

Teorema 1.4.5. ***(Teorema de Banach-Steinhaus** ó **Principio de acotamiento uniforme**)* *Sea X un espacio de Banach y Y ELN. Sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}^*(X, Y)$. Si*

$$(\forall x \in X) \sup_{T \in \mathcal{F}} \|T(x)\| < \infty \quad \textit{entonces} \sup_{T \in \mathcal{T}} \|T\| < \infty.$$

Demostración. Sean

$$A_n = \{x \in X : \|T(x)\| \leq n,\ T \in \mathcal{F}\}.$$

Notemos que para todo $x \in X$, se cumple que $x \in A_n$ para algún n. Así, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Verifiquemos que $\{A_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$ son cerrados. Para n fijo sea $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset A_n$ con $x_k \to x$ cuando $k \to \infty$ y notemos que $\|T(x_k)\| \leq n$ para cada $T \in \mathcal{F}$. Por la continuidad de T se tiene que $\|T(x_k)\| \to \|T(x)\|$ cuando $k \to \infty$, luego $\|T(x)\| \leq n$ para cada $T \in \mathcal{F}$, se tiene entonces que $x \in A_n$, por lo tanto cada A_n es cerrado.

Como $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, por el Corolario 1.4.2 algún A_n contiene un abierto. Tomemos pues $x_0 \in X$ y $\epsilon > 0$ tal que $\overline{B}_\epsilon(x_0) \subset A_n$. Para todo $x \in X$ con $\|x\| \leq 1$ tenemos que $x_0 + \epsilon x \in \overline{B}_\epsilon(x_0)$, de donde

$$\|T(x)\| = \|T(x \pm x_0/\epsilon)\| \leq \frac{1}{\epsilon}\|T(x_0 + \epsilon x)\| + \frac{1}{\epsilon}\|T(x_0)\| \leq \frac{2n}{\epsilon}$$

para todo $T \in \mathcal{F}$. □

Corolario 1.4.6. *Sea X un espacio de Banach y Y un ELN. Sea $\{T_n\} \subset \mathcal{L}^*(X,Y)$ tal que $\lim_{n\to\infty} T_n(x)$ existe en Y para todo $x \in X$. Si definimos $T(x) := \lim_{n\to\infty} T_n(x)$, entonces $T \in \mathcal{L}^*(X,Y)$ y $\|T\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\| < \infty$.*

Demostración. Se puede verificar sin mucha dificultad que $T \in \mathcal{L}^{\#}(X,Y)$. Ahora bien, tenemos que $\{\|T_n(x)\|\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada para cada $x \in X$, por el teorema anterior $\{\|T_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada. Así, tenemos que

$$\|T(x)\| = \|\lim_{n\to\infty} T_n(x)\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|\|x\|$$

para toda $x \in X$, de donde quedan demostrados ambos puntos del corolario. □

Definición 1.4.7. Sean X y Y espacios topológicos. Decimos que una función $T : X \to Y$ es **cerrada** (o que tiene **gráfica cerrada**) si el conjunto

$$Gr(T) := \{(x, T(x)) : x \in X\}$$

es cerrado en $X \times Y$ con la topopogía producto.

Se puede verificar que la definicion de función cerrada es equivalente a la siguiente implicación: si $x_n \to x$ y $T(x_n) \to y$ cuando $n \to \infty$, entoces $y = T(x)$. Así pues, si por ejemplo f es continua, es también cerrada, pero no viceversa.

En los siguientes resultados usamos 0_X y 0_Y para distinguir entre neutros aditivos en X y Y, respectivamente.

Lema 1.4.8. *Sea X espacio de Banach y Y ELN. Sea $T \in \mathcal{L}^*(X,Y)$ cerrada y $r > 0$. Si $B_r(0_Y) \subset \overline{T(B_1(0_X))}$, entonces de hecho $B_r(0_Y) \subset T(B_1(0_X))$.*

Demostración. Basta probar que $B_r(0_Y) \subset T\left(B_{\frac{1}{1-\epsilon}}(0_X)\right)$ para todo $\epsilon \in (0,1)$. Sea $y \in B_r(0_Y)$. Así, hay $x_0 \in B_1(0_X)$ con $\|y - T(x_0)\| < r\epsilon$, luego $y - T(x_0) \in B_{r\epsilon}(0_Y)$. Notemos que

$$B_{r\epsilon^n}(0_Y) = \epsilon^n B_r(0_Y) \subset \overline{\epsilon^n T(B_1(0_X))} = \overline{T(B_{\epsilon^n}(0_X))}.$$

Así, hay $x_1 \in B_\epsilon(0_X)$ con $\|y - T(x_0) - T(x_1)\| \leq r\epsilon^2$, luego $y - T(x_0) - T(x_1) \in B_{r\epsilon^2}(0_Y)$; y así sucesivamente. Hemos pues construido $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ con

$$\sum_{k=0}^\infty \|x_k\| < \sum_{k=0}^\infty \epsilon^k = \frac{1}{1-\epsilon} \text{ y } T\left(\sum_{k=0}^n x_k\right) \to y \text{ cuando } n \to \infty.$$

Como X es de Banach, $\sum_{k=0}^n x_k \to x$ cuando $n \to \infty$, y por ser T cerrada $T(x) = y$, y por lo tanto $y \in T\left(B_{\frac{1}{1-\epsilon}}(0_X)\right)$. $\square$

Teorema 1.4.9. ***(Teorema de la función abierta)*** *Sea X de Banach y Y ELN de segunda categoría (e.g. Banach). Sea $T \in \mathcal{L}^*(X,Y)$ cerrada (e.g. continua) y sobreyectiva. Entonces T es una función abierta.*

Demostración. Por ser T sobreyectiva, se tiene que $Y = \bigcup_{n=1}^\infty T(B_n(0_X))$. Por ser Y de segunda categoría, algún $\overline{T(B_n(0_X))}$ contiene un abierto, luego, como $\frac{1}{2n}\overline{T(B_n(0_X))} = \overline{T(B_{1/2}(0_X))}$, este último contiene un abierto $W \neq \emptyset$. Así que $W + (-W) := \{w_1 - w_2 : w_1, w_2 \in W\} \subseteq \overline{T(B_1(0_X))}$, además $W + (-W)$ es abierto y contiene a 0_Y. Tomemos $r > 0$ tal que $B_r(0_Y) \subset \overline{T(B_1(0_X))}$, y por el lema anterior $B_r(0_Y) \subset T(B_1(0_X))$. Usando este último hecho y las propiedades de linealidad de T tenemos lo siguiente. Sea U abierto arbitrario y $y \in T(U)$. Existe ϵ y $x \in X$ tal que

$$B_{r\epsilon}(y) = \epsilon B_r(0_Y) + y \subseteq \epsilon T(B_1(0_X)) + T(x) = T(B_\epsilon(x)) \subset T(U).$$

Lo cual demuestra que $T(U)$ es un conjunto abierto, por lo que T es función abierta. $\square$

Corolario 1.4.10. *Sean* $\| \bullet \|_1$ *y* $\| \bullet \|_2$ *dos normas en un ELN* X*, tales que* X *es completo con ambas normas. Supongase que existe* $c_1 > 0$ *con*

$$(\forall x \in X) \|x\|_1 \leq c_1 \|x\|_2, \tag{1.4}$$

entonces ambas normas son equivalentes.

Demostración. Consideremos la identidad en X desde el siguiente punto de vista: $id : (X, \| \bullet \|_2) \to (X, \| \bullet \|_1)$, obviamente esto es una función lineal y biyectiva, y la hipótesis (1.4) nos dice que esta función es continua. Aplicando el teorema anterior obtenemos que esta función id es abierta, luego $id^{-1} : (X, \| \bullet \|_1) \to (X, \| \bullet \|_2)$ es continua (por lo tanto id es un homeomorfismo). Así, existe c_2 tal que

$$(\forall x \in X) \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1;$$

entonces con $c := \text{máx}(c_1, c_2)$ se muestra que las normas son equivalentes. □

Teorema 1.4.11. ***(Teorema de la Gráfica Cerrada)*** *Sean* X *y* Y *espacios de Banach. Si* $T \in \mathcal{L}^{\#}(X, Y)$ *es cerrada, entonces* $T \in \mathcal{L}^*(X, Y)$*.*

Demostración 1. Definamos la norma $N(x) := \|x\| + \|T(x)\|$, verifiquemos que (X, N) es completo. Sea $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy con la norma N, entonces $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{T(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ son de Cauchy en X y Y, respectivamente. Por ser X y Y completos, existen $x \in X$ y $y \in Y$ con $x_k \to x$ y $T(x_k) \to y$ cuando $k \to \infty$. Por ser T cerrada $T(x) = y$, de donde

$$N(x - x_k) = \|x - x_k\| + \|T(x) - T(x_k)\| \to 0, \ k \to \infty.$$

Como N domina a $\| \bullet \|_X$, por el corolario anterior, existe $c > 0$ con $N(x) \leq c\|x\|$ para todo $x \in X$. Por lo tanto $\|T(x)\| \leq c\|x\|$. □

Ejemplo 1.4.12. Sea C' las funciones de $C[0, 1]$ que son diferenciables en todo $[0, 1]$, con la norma del supremo. Considere $D : C'[0, 1] \to C[0, 1]$ definida como $x \mapsto x'$ para todo $x \in C'[0, 1]$(la transformación que da la dervivada). Resulta que D es cerrada pero no continua.

1.5. Topologías débiles

Ahora veremos como utilizar las funcionales lineales para dotar de una topología a un espacio lineal. Al menos que se especifique lo contrario, a lo largo de esta sección X será un ELN.

Definición 1.5.1.
i) Decimos que una sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ **converge débilmente** a $x \in X$, denotado $x_n \stackrel{w}{\to} x$, si

$$(\forall f \in X^*) f(x_n) \to f(x),\ n \to \infty.$$

ii) Decimos que una sucesión $\{f_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X^{\#}$ **converge *-débilmente** a $f \in X^{\#}$, denotado $f_n \stackrel{w^*}{\to} f$, si

$$(\forall x \in X) f_n(x) \to f(x),\ n \to \infty.$$

iii) Cuando una sucesión converge con la norma del espacio, le llamamos convergencia **fuerte** (ó **con la norma** ó **original**).

Recordemos que

$$\begin{array}{l} x_n \to x \textit{ en } X \textit{ y } f \in X^* \textit{ implica } f(x_n) \to f(x), \\ f_n \to f \textit{ en } X^* \textit{ y } x \in X \textit{ implica } f_n(x) \to f(x). \end{array}$$

O sea que convergencia fuerte implica convergencia débil.

Ejemplo 1.5.2. Sea $X = l_p$ con $1 < p < \infty$. Sea $a \neq 0$ en l_p y defina $x_n = (0, \ldots, 0, a_1, a_2, \ldots)$, así $x_n \in l_p$ para cada n, y también $\|x_n\| = \|a\|$ para cada n. Así que $x_n \not\to 0$ cuando $n \to \infty$. Ahora, sea $f \in l_p^*$ arbitraria. Por el Teorema 1.3.2, hay $b := (b_k)_{k=1}^{\infty} \in l_q$ (con $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$) que representa a f, y se tiene que $f(x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{k+n} a_k$ para $n = 1, 2 \ldots$. Usando la desigualdad de Hölder tenemos

$$|f(x_n)| \leq \|(b_k)_{k=n+1}^{\infty}\|_q \|a\|_p \to 0 \textit{ cuando } n \to \infty.$$

Por lo tanto $x_n \stackrel{w}{\to} 0,\ n \to \infty$, pero $x_n \not\to 0,\ n \to \infty$ fuertemente.

Proposición 1.5.3. *Suponga que* $x_n \stackrel{w}{\to} x$ *en* X *cuando* $n \to \infty$,
i) se tiene entonces que $\{\|x_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ *es un conjunto acotado, y*
ii) el límite de la convergencia débil es único.

Demostración. i) Sabemos que $(\forall f \in X^*) f(x_n) \to f(x),\ n \to \infty$, luego $\{|eval_{x_n}(f)|\}_{n=1}^{\infty}$ es acotado para cada $f \in X^*$. Como X^* es un espacio de Banach (Teorema 1.2.22), por el Teorema de Banach-Steinhaus $\{\|eval_{x_n}\|\}_{n=1}^{\infty}$ es acotado, pero $\|eval_{x_n}\| = \|x_n\|$ para cada n.

ii) Supongamos que hay $x \neq y$ tales que $x_n \stackrel{w}{\to} x$ y $x_n \stackrel{w}{\to} y$ cuando $n \to \infty$. Por el Teorema de Hahn-Banach existe $f \in X^*$ con $f(x - y) \neq 0$, luego por hipótesis $f(x_n) \to f(x)$ y $f(x_n) \to f(y)$, de donde $f(x) = f(y)$, lo cual es una contradicción, por lo tanto $x = y$. $\square$

Proposición 1.5.4. *Suponga que* $x_n \xrightarrow{w} x$ *en* X *cuando* $n \to \infty$*. Entonces existe una sucesión* $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de combinaciones lineales de* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *tal que* $y_n \to x,\ n \to \infty$ *fuertemente, es decir*

$$(\exists \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \langle \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rangle)\ y_n \to x,\ n \to \infty.$$

Demostración. Queremos demostrar que $x \in \overline{\langle \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rangle}$. Supongamos lo contrario, $x \notin \overline{\langle \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rangle}$. Entonces por el Teorema de Hahn-Banach existe

$$f \in \overline{\langle \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rangle}^{\perp}$$

con $f(x) > 0$, lo cual contradice que $f(x_n) \to f(x)$. $\square$

En el siguiente ejemplo, las entradas de un elemento x de un espacio de sucesiones se denotan como $x := (x(1), x(2), \ldots)$.

Ejemplo 1.5.5. (**Lema de Schur**) Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset l_1$ que converge débilmente, entonces también converge fuertemente, o sea que en l_1,

$$x_n \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow x_n \to x \textit{ cuando } n \to \infty.$$

Demostración. Sin perdida de generalidad supongamos que $x_n \xrightarrow{w} 0$ cuando $n \to \infty$. Ahora supongamos que $x_n \not\to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces existe $M > 0$ y una subsucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\|y_n\| > M$ para $n = 1, 2, \ldots$.

Recordemos que $l_1^* = l_\infty$, denotamos $f_b := T(b)$ del Teorema 1.3.3. Así, $y_n \xrightarrow{w} 0$ cuando $n \to \infty$ significa que

$$(\forall b \in l_\infty) f_b(y_n) := \sum_{k=1}^{\infty} b(k) y_n(k) \to 0 \textit{ cuando } n \to \infty.$$

En particular, usando $\delta_i \in l_\infty$ tenemos que $f_{\delta_i}(y_n) = y_n(i)$, por lo que $y_n(i) \to 0$ cuando $n \to \infty$ para cada i. Consideremos pues el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccccc}
y_1(1) & y_1(2) & \ldots & y_1(i) & \ldots \\
y_2(1) & y_2(2) & \ldots & y_2(i) & \ldots \\
\vdots & & & & \\
y_n(1) & y_n(2) & \ldots & y_n(i) & \ldots \\
\vdots & & & & ,
\end{array}$$

y notemos que verticalmente cada columna tiende a cero y horizontalmente la cola sumada de cada cada renglón tiende a cero. Definamos $m_0 = 1$ y $n_0 = 1$, y tomemos

$$n_1 > n_0 : \sum_{k=1}^{m_0} |y_{n_1}(k)| < M/5; \text{ y ahora } m_1 > m_0 : \sum_{k=m_1}^{\infty} |y_{n_1}(k)| < M/5.$$

Luego tomamos

$$n_2 > n_1 : \sum_{k=1}^{m_1} |y_{n_2}(k)| < M/5; \text{ y ahora } m_2 > m_1 : \sum_{k=m_2}^{\infty} |y_{n_2}(k)| < M/5.$$

Cotinuando de esta manera, dados m_{j-1} y n_{j-1}, tomamos

$$n_j > n_{j-1} : \sum_{k=1}^{m_{j-1}} |y_{n_j}(k)| < M/5; \text{ y ahora } m_j > m_{j-1} : \sum_{k=m_j}^{\infty} |y_{n_j}(k)| < M/5.$$

Con $j = 1, 2, \ldots$, definimos $\tilde{b}$ tal que $\tilde{b}(k)y_{n_j}(k) = |y_{n_j}(k)|$ cuando $m_{j-1} \leq k < m_j$, luego $\tilde{b} \in l_\infty$. Ahora tenemos que para cada j fija

$$\left| \|y_{n_j}\|_1 - \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{b}(k) y_{n_j}(k) \right|$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{\infty} |y_{n_j}(k)| - \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{b}(k) y_{n_j}(k) \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \Big(|y_{n_j}(k)| - \tilde{b}(k) y_{n_j}(k) \Big) \right|$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{m_{j-1}-1} + \sum_{k=m_{j-1}}^{m_j-1} + \sum_{k=m_j}^{\infty} \right| \leq \frac{2M}{5} + 0 + \frac{2M}{5} = \frac{4}{5}M.$$

Por lo tanto, como $\|y_{n_j}\|_1 > M$ para $j = 1, 2, \ldots$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{b}(k) y_{n_j}(k) = f_{\tilde{b}}(y_{n_j}) > \frac{M}{5}$$

para $j = 1, 2, \ldots$. Lo cual dice que $f_{\tilde{b}}(x_n) \not\to 0$ cuando $n \to \infty$, lo que contradice el hecho de que $x_n \stackrel{w}{\to} 0$ cuando $n \to \infty$. $\square$

Para definir las topologías débiles en un ELN, necesitaremos considerar conjuntos de la siguiente forma. En un ELN X, sea $\epsilon > 0$ y $f \in X^{\#}$. Definimos

$$U_\epsilon(f) := \{x \in X : |f(x)| < \epsilon\}. \tag{1.5}$$

Definición 1.5.6. Sea $F \subseteq X^{\#}$ un subespacio vectorial. La $F-$topología de X, denotada $\tau_F(X)$ (ó solo τ_F), tiene como sub-base los conjuntos de la forma

$$x + U_\epsilon(f) = \{y \in X : |f(y) - f(x)| < \epsilon\}$$

con $x \in X,\ f \in F$ y $\epsilon > 0$.

Nota 1.5.7. Dada la definición anterior, notemos que la base de la topología débil está dada por

$$\left\{\bigcap_{k=1}^{n}(x_k + U_{\epsilon_k}(f_k))\right\}$$

para $\{x_k\}_{k=1}^n \subset X$ y $\{f_k\}_{k=1}^n \subset F$ y $\{\epsilon_k\}_{k=1}^n \subset (0,\infty)$. Notemos que

$$\{x \in X : |f_k(x)| < \epsilon_k,\ k = 1,\dots,n\} = \bigcap_{k=1}^{n} U_{\epsilon_k}(f_k)$$

o también que

$$\{x \in X : |f_k(x)| < \min_k \epsilon_k,\ k = 1,\dots,n\} \subset \bigcap_{k=1}^{n} U_{\epsilon_k}(f_k)$$

Veremos que

$$\left\{f \in X^{\#} : f \text{ continua con respecto a } \tau_F\right\} = F. \tag{1.6}$$

Proposición 1.5.8. *Si $F_1 \subset F_2 \subset X$, entonces $\tau_{F_1} \subset \tau_{F_2}$.*

Definición 1.5.9. La **topología débil** en X es $\tau_{X^*}(X)$, y la denotamos τ_w.

Proposición 1.5.10. *Se cumple que*

$$x_n \overset{w}{\to} x,\ n \to \infty \Leftrightarrow x_n \overset{\tau_w}{\to} x,\ n \to \infty.$$

Demostración. Tenemos las siguientes equivalencias

$$x_n \overset{w}{\to} x,\ n \to \infty \Leftrightarrow (\forall f \in X^*)(\forall \epsilon > 0)(\exists N > 0)|f(x_n) - f(x)| < \epsilon,\ n > N$$

$$\Leftrightarrow (\forall f \in X^*)(\forall \epsilon > 0)(\exists N > 0)x_n \in (x + U_\epsilon(f)),\ n > N$$

$$\Leftrightarrow (\forall \{f_1, \ldots, f_m \subset X^*\})(\forall \epsilon > 0)(\exists N > 0)x_n \in \left(x + \bigcap_{k=1}^{m} U_\epsilon(f_k)\right),\ n > N$$

$$\Leftrightarrow x_n \overset{\tau_w}{\to} x,\ n \to \infty.$$

□

Definición 1.5.11. La **topología débil-*** en X^* es $\tau_X(X^*)$, y la denotamos τ_{w^*}.

Notemos que es diferente que considerar $\tau_w(X^*)$ que $\tau_{w^*}(X^*)$; en general la primera es más fina (tiene más elementos).

Proposición 1.5.12. *Se cumple que*

$$f_n \overset{w^*}{\to} f,\ n \to \infty \Leftrightarrow f_n \overset{\tau_{w^*}}{\to} f,\ n \to \infty.$$

Definición 1.5.13. Un subconjunto $F \subset X^\#$ **separa** (ó es **total**) si $F^\perp = \{0\}$.

Nota 1.5.14. Se tiene que

i) F separa $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in X)(\exists f \in F)f(x_1) \neq f(x_2)$
$\Leftrightarrow (\forall x \in X)(\exists f \in F)f(x) \neq 0.$

ii) Si F separa y $F \subset F'$, entonces F' separa (e.g. $\langle F \rangle$ separa).

iii) Por el Teorema de Hahn-Banach, X^* separa.

Proposición 1.5.15. *Sea $F \subset X^*$ que separa, entonces $\langle F \rangle$ es denso en X^*.*

Demostración. Sabemos que $\overline{\langle F \rangle} = (F^\perp)^\perp$ (Teorema 1.3.21), así $\overline{\langle F \rangle} = \{0\}^\perp = X^*$ □

El siguiente lema será importante para mostrar (1.6). En particular el lema es cierto tomando $F = X^*$.

Lema 1.5.16. *Sea X un ELN, $x \in X$ y $F \subset X^\#$ que separa. Sean $x_1, \ldots, x_n \in X$ y supongase que $(F \bigcap \bigcap_{k=1}^n x_k^\perp) \subset x^\perp$, entonces $x \in \langle \{x_1, \ldots, x_n\} \rangle$.*

Demostración. Podemos suponer que F es subespacio (o trabajar con $\langle F \rangle$). Definimos $T : F \to \mathbb{K}^n$ como $T(f) = (f(x_1), \ldots, f(x_n))$ y recordemos que $eval_x(f) = f(x)$. Considermos ahora el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{T} & \mathbb{K}^n \\ & \overset{eval_x|_F}{\searrow} & \downarrow h \\ & & \mathbb{K} \end{array}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} & f \in N(T) \Rightarrow f(x_i) = 0, \ i = 1, \ldots, n \\ & \Rightarrow f \in \{x_i\}^{\perp}, \ i = 1, \ldots, n \\ & \Rightarrow f \in \{x\}^{\perp} \Rightarrow N(T) \subset N(eval_x \mid_F). \end{aligned}$$

Asi, se puede mostrar que existe $h : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ lineal con $eval_x \mid_F = h \circ T$, de tal forma que $h((t_1, \ldots, t_n)) = \sum_{k=1}^n \lambda_k t_k$. Así, $(\forall f \in F) f(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$, por lo tanto $x - \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \in F^{\perp}$, pero como F separa $F^{\perp} = \{0\}$, es decir, $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$. □

Teorema 1.5.17. *Sea $F \subset X^{\#}$ subespacio, entonces*

$$\{g \in X^{\#} : g \ \textit{es continua c.r.a} \ \tau_F\} = F.$$

Demostración. $(\supset)$ Si $f \in F$, entonces $f^{-1}(|\lambda| < \epsilon)$ está en τ_F, por lo que f es continua.
$(\subset)$ Sea $g \in X^{\#}$ una función $\tau_F - \textit{continua}$ (i.e. continua c.r.a τ_F), entonces se tiene que

$$g^{-1}(\{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| < 1\}) \in \tau_F \text{ y } 0 \in g^{-1}(\{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| < 1\}),$$

luego existen $f_1, \ldots, f_n \in F$ y $\epsilon > 0$ tales que

$$\bigcap_{k=1}^{n} U_\epsilon(f_k) \subset g^{-1}(\{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| < 1\}).$$

Ahora, note que $\delta < 1$

$$(\forall x \in X) \left| \frac{\epsilon f_k(x)}{\text{máx}(\delta, \text{máx}_{k=1,\ldots,n} |f_k(x)|)} \right| \leq \epsilon$$

para $k = 1, \ldots, n$, tenemos que

$$(\forall x \in X) \left| g\left(\frac{\epsilon x}{\text{máx}(\delta, \text{máx}_{k=1,\ldots,n} |f_k(x)|)} \right) \right| \leq 1,$$

por lo que

$$(\forall x \in X) |g(x)| \leq \frac{1}{\epsilon} \text{máx}(\delta, \max_{k=1,\ldots,n} |f_k(x)|).$$

En particular $f_k(x) = 0,\ k = 1, \ldots, n$ implica que $g(x) \leq \frac{\delta}{\epsilon}$. Al tomar $\delta \to 0$ tenemos que $g(x) = 0$, es decir $\bigcap_{k=1}^{n} \{f_k\}^{\perp} \subset \{g\}^{\perp}$. Por el lema anterior g es combinación lineal de $\{f_1, \ldots, f_n\}$, por lo tanto $g \in F$. □

Lema 1.5.18. *Sea X espacio vectorial y $F \subset X^{\#}$ subespacio que separa, y $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ conjunto lin.ind. Entonces existen $f_1, \ldots, f_n \in F$ tales que*

$$f_k(x_j) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k. \end{cases}$$

A $(\{f_k\}_{k=1}^{n}, \{x_i\}_{i=1}^{n})$ de este lema se le llama **familia biortonormal**.
Demostración. Por el Lema 1.5.16, $F \bigcap \bigcap_{j \neq k} \{x_j\}^{\perp} \not\subset \{x_k\}^{\perp}$ para $k = 1, \ldots, n$. Para cada k, sea

$$g_k \in F \bigcap \bigcap_{j \neq k} \{x_j\}^{\perp} - \{x_k\}^{\perp}.$$

Así, $g_k \in F$ y $g_k(x_j) = 0$ cuando $j \neq k$, pero $g_k(x_k) \neq 0$ para $k = 1, \ldots, n$. La familia biortonormal se construye como $f_k(\bullet) = \frac{1}{g_k(x_k)} g_k(\bullet)$. □

En lo susecesivo, se usarán los siguientes conjuntos,

$$U_{\epsilon}^{*}(x) := \{f \in X^{*} : |eval_x(f)| < \epsilon\}.$$

Proposición 1.5.19. *Sea $F \subset X^{*}$ subespacio. Entonces F separa si y solo si F es $w^{*} - denso$ en X^{*} (i.e. denso con la topología débil-*).*

Demostración. $(\Leftarrow)$ Sea F $w^{*} - denso$ en X^{*}. Sea $x \in F^{\perp}$ y supongase que $x \neq 0$. Por el Teorema de Hahn-Banach, hay $g \in X^{*}$ con $g(x) = 1$. Como F es $w^{*} - denso$, hay $f \in g + U_{1/2}^{*}(x)$ y en F, luego $|f(x) - g(x)| < 1/2$. Así, $|f(x)| > 1/2$, contradiciendo que $f(x) = 0$, por lo tanto $x = 0$, luego $F^{\perp} = \{0\}$.
$(\Rightarrow)$ Sea U una $\tau_{w^{*}} - vecindad$ de $g_0 \in X^{*}$. Existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $\epsilon > 0$

con $g_0 + \bigcap_{k=1}^n U_\epsilon^*(x_k) \subset U$. Podemos considerar sin perdida de generalidad que $\{x_j\}_{j=1}^n$ es un conjunto lin.ind. Por el lema anterior, hay $f_1, \ldots, f_n$ en F tales que $\left(\{f_k\}_{k=1}^n, \{x_j\}_{j=1}^n\right)$ forma una familia biortonormal. Tomemos ahora $f = \sum_{k=1}^n g_0(x_k) f_k$, la cual está en F y cumple con $f(x_k) = g_0(x_k)$ para $k = 1, \ldots, n$. Así, $|f(x_k) - g_0(x_k)| < \epsilon$ para cada k, por lo que $f \in g_0 + \bigcap_{k=1}^n U_\epsilon^*(x_k)$. Como $f \in U$, se cumple que F es $w^* -$ *denso.* $\square$

Proposición 1.5.20. *Sea X un ELN. Sea $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$, entonces $x_n \overset{w}{\to} x,\ n \to \infty$ si y solo si*
i) $\{\|x_n\|\}_{n=1}^\infty$ es acotada, y
ii) existe $F \subseteq X^*$ subespacio que separa, tal que

$$(\forall f \in F) f(x_n) \to f(x),\ n \to \infty.$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Cuando $x_n \overset{w}{\to} x,\ n \to \infty$ ya tenemos i) y ii).
($\Leftarrow$) Supongamos i) y ii). Existe $M > 0$ tal que $\|x_n\| \leq M$ para $n = 1, 2, \ldots$. Ahora, sea $f \in X^*$ arbitrario. Como F es denso (por la Proposición 1.5.19), $(\forall \epsilon > 0)(\exists g \in F)\|f - g\| < \frac{\epsilon}{3M'}$, donde $M' := \text{máx}(\|x\|, M)$. Además, por hipótesis existe N tal que $|g(x_n) - g(x)| < \frac{\epsilon}{3}$ para $n > N$. Así, para $n \geq N$ y para toda $f \in X^*$,

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(x)| &\leq |f(x_n) - g(x_n)| + |g(x_n) - g(x)| + |g(x) - f(x)| \\ &\leq \|f - g\|\|x_n\| + |g(x_n) - g(x)| + \|g - f\|\|x\| < \epsilon, \end{aligned}$$

por lo tanto $x_n \overset{w}{\to} x$ cuando $n \to \infty$. $\square$

De manera similar tenemos lo siguiente.

Proposición 1.5.21. *Sea X un ELN, y sea $\{f, \{f_n\}_{n=1}^\infty\} \subset X^*$. Supongase que*
i) $\{\|f_n\|\}_{n=1}^\infty$ es un conjunto acotado, y que
ii) existe $D \subseteq X$ denso, tal que $f_n(x) \to f(x)$ cuando $n \to \infty$ para $x \in D$.
Entonces $f_n \overset{w^*}{\to} f$ cuando $n \to \infty$.

El siguiente resultado resulta de gran utilidad en diversas aplicaciones.

Teorema 1.5.22. *(**Teorema de Banach-Alaoglu**) Sea X un ELN. Se tiene que la bola unitaria cerrada $\overline{B_1(0)}$ en X^* es $w^* -$ compacta.*

Demostración. Defina $B_x := \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq \|x\|\}$. Por el Teorema de Tychonoff, el espacio producto $\Pi_{x \in X} B_x$ es compacto; notemos que $\Pi_{x \in X} B_x$

contiene todas las funciones h que de X a $\mathbb{K}$ que cumplen $(\forall x \in X)|h(x)| \leq \|x\|$. Así pues, tenemos que

$$\overline{B_1(0)} = X^* \bigcap \Pi_{x\in X} B_x.$$

Además, podemos verificar que la topología fuerte de $\overline{B_1(0)}$ es también la heredada por $\Pi_{x\in X} B_x$. En efecto, sea p_x la $x-$proyección de $\Pi_{x\in X} B_x$, luego para $0 < \epsilon \leq 1$,

$$p_x^{-1}(-\epsilon, \epsilon) = \{(h : X \to \mathbb{K}) \text{ tales que } |h(x)| < \epsilon\},$$

por lo que, $U_\epsilon^*(x) = \overline{B_1(0)} \bigcap p_x^{-1}(-\epsilon, \epsilon)$. Recordemos que la topología producto es la que hace continuas a las proyecciones, y $p_x^{-1}(-\epsilon, \epsilon)$ forma una sub-base. Por lo que estamos diciendo que la sub-base del espacio producto noS da (al efectuar la intersección) la sub-base de la topología fuerte, luego, la topología fuerte es la heredada de la topología producto.

Ahora veremos que $\overline{B_1(0)}$ es $w^* - cerrado$. Sea g en la $w^* - cerradura$ de $\overline{B_1(0)}$ y sean $x, y \in X$. Para toda $\epsilon > 0$ podemos tomar f en

$$g + U_{\epsilon/3}^*(x) \bigcap U_{\epsilon/3}^*(y) \bigcap U_{\epsilon/3}^*(x+y) \text{ y también en } f \in \overline{B_1(0)}.$$

Luego

$$|g(x)+g(y)-g(x+y)| \leq |g(x)-f(x)|+|g(y)-f(y)|+|g(x+y)-f(x+y)| < \epsilon.$$

Como ϵ es arbitrario, se tiene que $g(x+y) = g(x) + g(y)$. Similarmente podemos ver que $g(\lambda x) = \lambda g(x)$ para todos $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x \in X$, por lo tanto g es lineal. Dicha g es de norma ≤ 1 por estar en $\Pi_{x\in X} B_x$. Así, g es un punto límite de $\overline{B_1(0)}$ con la topología de la norma, o sea $g \in \overline{B_1(0)}$. Podemos entonces concluir que $\overline{B_1(0)}$ es $w^* - cerrado$, luego, es compacto, pues está dentro del compacto $\Pi_{x\in X} B_x$, quien le heredó su topología producto. $\square$

Capítulo 2

Espacios de Hilbert

2.1. Espacios con producto interno

Para todo efecto práctico, en esta sección nos restringimos al campo $\mathbb{C}$ (que incluye $\mathbb{R}$).

Definición 2.1.1. Un **producto interno** en un espacio vectorial X es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ que cumple
(I) para $y \in X$ fijo, $x \mapsto \langle x, y \rangle$ es lineal,
(II) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,
(III) $\langle x, x \rangle \geq 0$,
(IV) $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

De la definición, tenemos las reglas

$$\begin{aligned} \langle \lambda x + \mu y, z \rangle &= \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle, \\ \langle x, \lambda y + \mu z \rangle &= \overline{\lambda} \langle x, y \rangle + \overline{\mu} \langle x, z \rangle. \end{aligned}$$

Lema 2.1.2. *Sea X un espacio vectorial con producto interno. Entonces*
(I) $x = 0 \iff (\forall y \in X)\ \langle x, y \rangle = 0$,
(II) $x = y \iff (\forall z \in X)\ \langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$,

Nota 2.1.3. La función $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ es una norma en X. Esta norma determina una topología en X.

Ejemplo 2.1.4. $X = \mathbb{C}^n$, $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$ donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$. La norma es

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$

Ejemplo 2.1.5. Más generalmente, sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz n-por-n que satisface $\overline{A}^{\mathrm{T}} A = I$ donde A^{T} es la matriz transpuesta. Defínase

$$\langle x, y\rangle_A = \sum_{i,j} x_i a_{ij} \overline{y_j} = x^{\mathrm{T}} A \overline{y}$$

para $x, y \in \mathbb{C}^n$. Entonces $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ es un producto escalar en $\mathbb{C}^n$. Todo producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en $\mathbb{C}^n$ se obtiene de esta forma: de los elementos básicos $\delta_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ se define $a_{ij} = \langle\delta_i, \delta_j\rangle$.

En los siguientes resultados X es un espacio vectorial con producto interno.

Teorema 2.1.6. *Se cumple lo siguiente para todos $x, y \in X$:*
(i) $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ *(**desigualdad de Cauchy-Schwarz**),*
(ii) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ *(**Ley del paralelogramo**),*
*(iii) Si $\langle x, y\rangle = 0$, entonces $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (**Pitágoras**).*

Demostración. (i) Supongamos que $y \neq 0$, pues de otro modo es trivial;

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x - \lambda y\|^2 = \langle x - \lambda y,\ x - \lambda y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle - \overline{\lambda}\langle x, y\rangle - \lambda(\langle y, x\rangle - \overline{\lambda}\langle y, y\rangle). \end{aligned}$$

Tomemos λ para anular el último término, $\overline{\lambda} = \langle y, x\rangle / \langle y, y\rangle$, dejando

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x, x\rangle - \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle x, y\rangle \\ &= \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2}, \end{aligned}$$

de lo cual se sigue la desigualdad de Cauchy-Schwarz.
(ii) Al expandir $\|x \pm y\|^2$ aparecen términos $\pm(\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle)$ que se cancelan en la suma $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$, dejando $2(\langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle)$.

(iii) Esto resulta al anularse los términos $\langle x, y\rangle$, $\langle y, x\rangle$ que surgen al expandir $\|x + y\|^2$. $\square$

Ahora veremos numerosas consecuencias de estas propiedades, sobre de todo la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Proposición 2.1.7. $\|x\| = \sup\{|\langle x, y\rangle| : \ \|y\| = 1\}$.

Demostración. Si $x = 0$, se cumple trivialmente. Sea $\|y\| = 1$, por Cauchy-Schwarz $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|$. Ahora, para $y := x/\|x\|$,

$$|\langle x, y\rangle| = \left|\left\langle x, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle\right| = \frac{|\langle x, x\rangle|}{\|x\|} = \|x\|,$$

por lo tanto se alcanza el supremo. $\square$

Proposición 2.1.8. *Si se cumple la ley del paralelogramo en un ELN X, entonces existe un producto interno en X que define la norma.*

Demostración. Para cualquier $x, y \in X$, definamos

$$4\langle x, y\rangle := \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2.$$

Como se cumple la ley del paralelogramo se puede verificar que,
$4Real(\langle u + v, w\rangle) = 4Real(\langle u, w\rangle) + 4Real(\langle v, w\rangle)$,
y también que $\langle x, iy\rangle = -i\langle x, y\rangle$,
luego $4Img(\langle u + v, w\rangle) = 4Img(\langle u, w\rangle) + 4Img(\langle v, w\rangle)$,
por lo que $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v + w\rangle$ para todos $u, v, w \in X$.
Así, $\langle nx, y\rangle = n\langle x, y\rangle$ para todo entero positivo n, de donde
$\langle \frac{n}{m}x, y\rangle = \frac{n}{m}m\langle \frac{x}{m}, y\rangle = \frac{n}{m}\langle x, y\rangle$, para enteros positivos n, m. Por continuidad

$$\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle \tag{2.1}$$

para todo $\lambda \geq 0$.

Se puede también observar que $\langle -x, y\rangle = -\langle x, y\rangle$ y que $\langle ixy\rangle = i\langle x, y\rangle$, por lo que (2.1) se cumple para todo $\lambda \in \mathbb{C}$

Finalmente, de nuestra construcción de producto interno, se puede verificar que $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$ y que $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$. $\square$

Definición 2.1.9. Sea X un espacio con producto interno. Decimos que
(I) $x, y \in X$ son **ortogonales** si $\langle x, y\rangle = 0$, y lo denotamos $x \perp y$,

(II) un conjunto $E \subseteq X$ es **ortogonal** si cualesquier dos elementos de E son ortogonales, y

(III) E es **ortonormal** si es ortogonal y sus elementos tienen norma 1.

Proposición 2.1.10. *(Generalización del T. de Pitágoras) Sean $x_i \in X$ ($i = 1, \ldots, n$) ortogonales. Entonces $\|\sum_{i=1}^n x_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$.*

Teorema 2.1.11. (Ortogonalización de Gram-Schmidt) *Sea $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ un conjunto lin.ind. en X. Entonces, existe $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ ortonormal tal que para cada n, $\langle\{y_k\}_{k=1}^n\rangle = \langle\{x_k\}_{k=1}^n\rangle$.*

Demostración. Definimos $y_1 := x_1/\|x_1\|$, e iterativamente

$$y_n := \frac{x_n - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\langle x_n, y_k\rangle y_k}{\left\|x_n - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\langle x_n, y_k\rangle y_k\right\|}$$

para $n = 2, 3, \ldots$. Dicho conjunto cumple lo deseado. □

Definición 2.1.12. Una **base ortonormal** (ó **conjunto ortonormal completo** ó **sistema ortonormal completo**) de X es un conjunto ortonormal máximo. (Se admite el conjunto vacío en el caso de que $X = \{0\}$.)

Una base ortonormal no necesariamente es una base de Hamel ó de Schauder.

Nota 2.1.13. Utilisando el Lema de Zorn se puede demostrar que todo ELN X con producto interno tiene una base ortonormal.

Teorema 2.1.14. *Sean $e_1, \ldots, e_n$ ortonormales en X, y sea $x \in X$ arbitrario. Entonces,*

*(I) $\sum_{j=1}^n |\langle x, e_j\rangle|^2 \leq \|x\|^2$ (**Desigualdad de Bessel**) y*

(II) para cada $k = 1, \ldots, n$, se tiene que $(x - \sum_{j=1}^n \langle x, e_j\rangle e_j) \perp e_k$.

Demostración. (i) se sigue de

$$0 \leq \|x - \sum_{j=1}^n \langle x, e_j\rangle e_j\|^2 = \langle x, x\rangle - 2\sum_{j=1}^n |\langle x, e_j\rangle|^2 + \sum_{j=1}^n |\langle x, e_j\rangle|^2.$$

Para mostrar (ii), observamos que

$$\left\langle x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j \ , \ e_k \right\rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle x, e_k \rangle = 0$$

para $k = 1, \ldots, n$. □

Corolario 2.1.15.
(i) Si $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ es ortonormal, entonces $\lim_{j\to\infty} \langle x, e_j \rangle = 0$.
(ii) Si $E \subseteq X$ es ortonormal, entonces para cada $x \in X$, el subconjunto de elementos $e \in E$ tales que $\langle x, e \rangle \neq 0$ es a lo más numerable.

Demostración. El inciso (i) es consecuencia inmediata de la desigualdad de Bessel pues $|\langle x, e_j \rangle|^2 \to 0$. Para (ii), fijemos $x \in X$ y consideremos $S = \{e \in E \colon \ \langle x, e \rangle \neq 0\}$. Definamos

$$S_n(x) := \left\{ e \in E \colon \ |\langle x, e \rangle| > \frac{\|x\|}{n} \right\} \subseteq S.$$

Si hubiese más de n^2 elementos en $S_n(x)$, digamos $e_1, \ldots, e_N$ con $N > n^2$, tendríamos

$$\sum_{j=1}^{N} |\langle x, e_j \rangle|^2 > N(\|x\|/n)^2 > \|x\|^2,$$

contrario a la desigualdad de Bessel. Por lo tanto $S_n(x)$ es finito y la unión $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n(x)$ es numerable. □

Teorema 2.1.16. (Teorema de bases ortonormales) *Sea X espacio con producto interno y $E \subseteq X$ ortonormal. Las siguientes son equivalentes:*
(i) E es completo,
(ii) $(\forall x \in X)$ ($x \perp E \implies x = 0$),
(iii) $(\forall x \in X)$ $x = \sum_{e \in E} \langle x, e \rangle e$,
*(iv) $(\forall x \in X)$ $\|x\|^2 = \sum_{e \in E} |\langle x, e \rangle|^2$ (**identidad de Parseval**) .*

Cuando se cumple alguna de estas condiciones se dice que E es una *base ortonormal* de X. Recuerde que las sumatorias en (iii),(iv) son numerables por el Corolario 2.1.15.

Demostración. (i)⇒(ii): Sea E completo. Consideremos $x \perp E$. Si $x \neq 0$, entonces $E \cup \{x/\|x\|\}$ sería ortonormal, contradiciendo que E es completo.

Por lo tanto $x = 0$.
(ii)⇒(iii): Sabemos que $x - \sum_{e\in E}\langle x, e\rangle e \perp E$ (donde la sumatoria es forzosamente numerable), y al asumir (ii) tenemos $x - \sum_{e\in E}\langle x, e\rangle e = 0$.
(iii)⇒(iv): Enumerando $\{e \in E\colon\ \langle x, e\rangle \neq 0\} = \{e_j\}$,

$$\left\|\sum_{j=1}^{n}\langle x, e_j\rangle e_j\right\|^2 = \sum_{j=1}^{n}\|\langle x, e_j\rangle e_j\|^2 = \sum_{j=1}^{n}|\langle x, e_j\rangle|^2.$$

Al asumir (iii), la continuidad de la norma da

$$\|x\|^2 = \left\|\sum_{E}\langle x, e\rangle e\right\|^2 = \left\|\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\langle x, e_j\rangle e_j\right\|^2 = \lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{j=1}^{n}\langle x, e_j\rangle e_j\right\|^2$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty}|\langle x, e_j\rangle|^2 = \sum_{E}|\langle x, e\rangle|^2.$$

(iv)⇒(i): Supongamos ahora la identidad de Parseval. Si E no fuera completo, tomaríamos $y \in X - E$ con $E \cup \{y\}$ ortonormal para dar con la contradicción

$$1 = \|y\|^2 = \sum_{e\in E}|\langle y, e\rangle| = 0.$$

Por lo que E tiene que ser completo. □

Definición 2.1.17. Sea E una base ortonormal de X. Al conjunto $\{\langle x, e\rangle\}_{e\in E}$ se le llama los **coeficientes de Fourier** de x (relativos a E), y a $\sum_{e\in E}\langle x, e\rangle e$ se le llama la **serie de Fourier** de x (relativa a E).

Teorema 2.1.18. *Sea X un espacio con producto interno. Entonces X es separable si y solo si tiene una base ortonormal a lo más numerable.*

Demostración. (⇐) Usando la base ortonormal numerable es posible exhibir un conjunto denso numerable.
(⇒) Supongamos que X es separable (i.e. hay un denso numerable D), y sea E una base ortonormal. Para cada $e \in E$, se tiene $B_{\sqrt{2}/2}(e)\bigcap D \neq 0$. Pero para $e_1, e_2 \in E$ distintos, $\|e_1 - e_2\| = \sqrt{2}$, luego $B_{\sqrt{2}/2}(e_1)\bigcap B_{\sqrt{2}/2}(e_2) = \emptyset$. Por lo tanto, la cardinalidad de E es menor o igual a la de D. □

Teorema 2.1.19. *Sea X un espacio con producto interno y $E \subset X$ conjunto ortonormal. Considere el problema de optimización para un conjunto $\{e_1, \dots e_n\} \subset E$ dado:*

$$\text{ínf}\left\{\left\|u - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k\right\|^2 : c_k \in \mathbb{K}\right\}$$

con $u \in X$ fijo. Entonces, se alcanza el mínimo solo cuando $c_k = \langle u, e_k\rangle$ para $k = 1, \dots, n$.

Demostración. Notemos que

$$\begin{aligned}\left\langle u - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, u - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k\right\rangle &= \langle u, u\rangle - \sum_{k=1}^{n} \overline{c_k}\langle u, e_k\rangle - \sum_{k=1}^{n} c_k\langle e_k, u\rangle + \sum_{k=1}^{n} \overline{c_k} c_k \\ &= \|u\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle u, e_k\rangle|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle u, e_k\rangle - c_k|^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto se alcanza un único minimo cuando $c_k = \langle u, e_k\rangle,\ k = 1, \dots, n$.
$\square$

Teorema 2.1.20. *Sea X espacio con producto interno y $E := \{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ conjunto ortonormal. Entonces E es completo si y solo si $\langle E\rangle$ es denso en X.*

Demostración. La necesidad es relativamente fácil verla. Mostremos pues la suficiencia. Sea $u \in X$ arbitrario, entonces suponiendo que $\langle E\rangle$ es denso, hay $\{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \langle E\rangle$ tal que $(\forall\epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n \geq N)\|w_n - u\| < \epsilon$. Cada w_n es de la forma $\sum_{k=1}^{m_n} c_k(n)e_k$, con $m_n \in \mathbb{N}$ y $\{c_k(n)\}_{k=1}^{m_n} \subset \mathbb{K}$ para cada $n = 1, 2, \dots$. Por el teorema anterior

$$\left\|u - \sum_{k=1}^{m_n} \langle u, e_k\rangle e_k\right\| \leq \left\|u - \sum_{k=1}^{m_n} c_k(n)e_k\right\|.$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty}\left\|u - \sum_{k=1}^{m_n} \langle u, e_k\rangle e_k\right\| = 0;$$

por el teorema de bases ortonormales E es completo. $\square$

2.2. Espacios completos

Definición 2.2.1. Un **espacio de Hilbert** es un espacio lineal con producto interno que además es completo.

Ejemplo 2.2.2. $\mathbb{C}^n$ y l_2 son espacios de Hilbert. $C[0,1]$ no es espacio de Hilbert (es un subespacio lineal no cerrado de $L^2[0,1]$).

Teorema 2.2.3. *(**Teorema de Riesz-Fischer**) Todo espacio de Hilbert separable de dimensión infinita es isométricamente isomorfo a l_2.*

Se puede demostrar este teorema con ayuda del siguiente resultado.

Teorema 2.2.4. *Sea X un espacio de Hilbert de dimensión infinita, y $E \subset X$ ortonormal. Entonces, para todo $b := (b_1, b_2, \ldots) \in l_2$ y cualquier conjunto $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset E$, existe $x \in X$ con $\langle x, e\rangle = b_k$ para cada k.*

Demostración. Definamos $x_n = \sum_{k=1}^{n} b_k e_k$. Así, para $m > n$,

$$\|x_n - x_m\|^2 = \|\sum_{k=n+1}^{m} b_k e_k\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} |b_k|^2 \to 0$$

cuando $n \to \infty$. Por lo que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy, así que existe $x \in X$ a donde converge. Además,

$$\langle x, e_k\rangle = \langle \lim_{n\to\infty} x_n, e_k\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, e_k\rangle = b_k$$

para $k = 1, 2, \ldots$. $\square$

Veamos que concecuencias tenemos cuando el espacio es completo, además los siguientes dos resultados nos permitirán demostrar el teorema de Riesz, el cual es muy importante.

Teorema 2.2.5. *Sea X un espacio de Hilbert, y sea $E \subseteq X$ no vacío, cerrado y convexo. Entonces, existe un único $x \in E$ de norma mínima.*

Demostración. Tomemos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ tal que $\|x_n\| \to d := \inf_{x\in E} \|x\|$ cuando $n \to \infty$. Por la ley del paralelogramo,

$$\left\|\frac{x_n - x_m}{2}\right\|^2 = 2\left\|\frac{x_n}{2}\right\|^2 + 2\left\|\frac{x_m}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2.$$

Como $(x_n + x_m)/2 \in E$ por convexidad,

$$\|x_n - x_m\|^2 \leq 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - 4d^2,$$

lo cual converge a 0 cuando $m, n \to \infty$. Luego, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, y como E es cerrado el límite $x = \lim x_n$ está en E. Por lo tanto $\|x\| = d$.
(unicidad) Supongamos que $x, y \in E$ tales que $\|x\| = \|y\| = d$ donde d es el ínfimo de las distancias de 0 a elementos de E. Por la ley del paralelogramo,

$$\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = 2\left\|\frac{x}{2}\right\|^2 + 2\left\|\frac{y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 \leq d^2/2 + d^2/2 - d^2 = 0,$$

por lo que $x = y$. $\square$

En espacios X con producto interno, para $E \subseteq X$, escribimos

$$E^{\perp} := \{x \in X : \ x \perp E\},$$

llamado el **complemento ortogonal**.

Definición 2.2.6. Dados dos subespacios lineales Y_1, Y_2 de un espacio lineal X, una **suma directa**, denotada $X = Y_1 \oplus Y_2$, es cuando todo elemento de X es suma de un elemento de Y_1 y un elemento de Y_2 de manera única.

Teorema 2.2.7. *Sea X un espacio de Hilbert y sea $Y \subseteq X$ un subespacio cerrado. Entonces $X = Y \oplus Y^{\perp}$.*

Demostración. Podemos suponer que Y es subespacio propio, de otro modo la conclusión es trivial. Fijemos $x \in X$. Sea $E = Y + x \subseteq X$; entonces E es no vacío, cerrado y convexo. Usando el teorema anterior, sea $z \in E$ de norma mínima. Sea $y = x - z$.

Consideremos $w \in Y$ con $\|w\| = 1$; luego $\langle z, w\rangle w - z \in E$ porque al sumar x obtenemos un elemento de Y. Por definición de z,

$$\|z\|^2 \leq \|z - \langle z, w\rangle w\|^2 = \|z\|^2 - 2|\langle z, w\rangle|^2 + |\langle z, w\rangle|^2\|w\|^2 \leq \|z\|^2,$$

por lo que $\langle z, w\rangle = 0$, o sea $z \perp w$. Esto demuestra que $z \in Y^{\perp}$, y tenemos $x = y + z$.

(unicidad) Supongamos que $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2$ con $y_1, y_2 \in Y$ y $z_1, z_2 \in Y^{\perp}$. Entonces $y_1 - y_2 = z_1 - z_2 \in Y \cap Y^{\perp} = \{0\}$, por lo tanto $y_1 = y_2$ y $z_1 = z_2$. Concluimos entonces que $X = Y \oplus Y^{\perp}$. $\square$

Note que el siguiente resultado es análogo a la Proposición 1.1.27.

Teorema 2.2.8. ***(Teorema de Representación de Riesz)*** *Sea X un espacio de Hilbert, y sea $f \in X^*$. Entonces, existe un único $y \in X$ tal que*

$$(\forall x \in X)\ f(x) = \langle x, y \rangle.$$

Demostración. (existencia) Si $f = 0$, entonces $y = 0$. Sea pues $f \neq 0$, y definamos $Y = N(f) \neq X$. Observemos que $f|_{Y^\perp}$ es 1-a-1 porque $N(f|_{Y^\perp}) = N(f) \cap Y^\perp = \{0\}$.

Como f es continua, Y es cerrado y por le teorema anterior $Y^\perp \neq \{0\}$. Tomemos pues $z \in Y^\perp$ de norma uno, sabemos $f(z) \neq 0$ por la inyectividad. Para cualquier $x \in X$ se tiene

$$f\left(x - \frac{f(x)}{f(z)} z\right) = f(x) - \frac{f(x)}{f(z)} f(z) = 0$$

por lo tanto $x - \frac{f(x)}{f(z)} z$ está en Y y así es ortogonal a z. De esto se sigue $f(x)\langle z, z\rangle = f(z)\langle x, z\rangle$, lo cual implica $f(x) = f(z)\langle x, z\rangle = \langle x, y\rangle$ donde $y = \overline{f(z)} z$.

(unicidad) Ahora mostramos la unicidad.Supongamos que $(\forall x \in X)\ f(x) = \langle x, y_1\rangle = \langle x, y_2\rangle$. Entonces $(\forall x \in X)\ \langle x, y_1 - y_2\rangle = 0$. Por lo tanto $y_1 = y_2$, por el Proposición 2.1.7. □

De la demostración anterior se tiene también que

Lema 2.2.9. *Para $f \in X^*$ no nulo, $dim(N(f)^\perp) = 1$.*

Ahora mostramos la existencia del **operador adjunto** T^* de un operador T.

Teorema 2.2.10. *Sea X espacio de Hilbert y sea $T \in \mathcal{L}^*(X)$. Entonces, existe un único $T^* \in \mathcal{L}^*(X)$, tal que*

$$(\forall x, y \in X)\ \langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle.$$

Además, $\|T^*\| = \|T\|$.

Demostración. Para cada $y \in X$ fijo, $x \mapsto \langle T(x), y\rangle$ es lineal y acotada, entonces por el Teorema de Representación de Riesz, existe un único $y' \in X$ con $\langle T(x), y\rangle = \langle x, y'\rangle$ para toda $x \in X$. Definamos pues T^* como la asignación $y \mapsto y'$. Aplicando la regla $\langle T(v), w\rangle = \langle v, T^*(w)\rangle$, encontramos que

$$\langle v, T^*(\lambda x + y)\rangle = \langle v, \lambda T^*(x) + T^*(y)\rangle$$

para toda $v \in X$, de lo cual se sigue que T^* es lineal. Finalmente, usando el Lema 2.1.2,

$$\|T^*\| = \sup_{\|y\|=1} \|T^*(y)\| = \sup_{\|y\|=1} \sup_{\|x\|=1} |\langle x, T^*(y)\rangle| = \sup_{\|x\|=1} \sup_{\|y\|=1} |\langle T(x), y\rangle| = \|T\|.$$

Pudimos intercambiar $\sup_{\|x\|=1} \sup_{\|y\|=1}$ porque $|\langle x, y\rangle| \geq 0$. $\square$

Proposición 2.2.11. *Sean $T, T_1, T_2 \in \mathcal{L}^*(X)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces*
*(*I*)* $(\lambda T_1 + T_2)^* = \overline{\lambda} T_1^* + T_2^*$
*(*II*)* $(T_1 \circ T_2)^* = T_2^* \circ T_1^*$
*(*III*)* $(T^*)^* = T$
*(*IV*)* $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

En lo sucesivo denotamos la composición $T_1 \circ T_2$ como T_1T_2.

Definición 2.2.12. Sea X un espacio con producto interno.
(I) $T \in \mathcal{L}^*(X)$ es **autoadjunto** si $T^* = T$,
(II) $T \in \mathcal{L}^\#(X)$ es **Hermitiano** (ó **simétrico**) si $(\forall x, y \in X)\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$.

Mostramos ahora que, sin saber que es acotado, la propiedad de ser Hermitiano implica que el operador es acotado.

Teorema 2.2.13. *Sea X un espacio de Hilbert, y sea $T \in \mathcal{L}^\#(X)$ tal que $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle$ para todos $x, y \in X$. Entonces T es un operador acotado, y por ende autoadjunto.*

Demostración. Para cada $y \in X$ de norma uno, definimos $T_y(x) = \langle T(x), y\rangle$, sabemos que T_y es lineal porque T y $\langle \cdot, y\rangle$ son lineales. La hipótesis $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle$ y la desigualdad de Cauchy-Schwarz dan

$$|T_y(x)| = |\langle T(x), y\rangle| = |\langle x, T(y)\rangle| \leq \|x\|\|T(y)\|,$$

por lo que T_y es funcional acotado, pues $\|T_y\| \leq \|T(y)\|$. Además, tomando $x := T(y)/\|T(y)\|$ vemos que de hecho $\|T_y\| = \|T(y)\|$.

Además, para todo $y \in X$ de norma uno y para cada $x \in X$,

$$|T_y(x)| = |\langle T(x), y\rangle| \leq \|T(x)\|,$$

por lo que

$$\sup_{\|y\|=1} |T_y(x)| \leq \|T(x)\| < \infty.$$

Por el Teorema de Banach-Steinhaus, $\sup_{\|y\|=1} \|T_y\| < \infty$. Pero, usando la Proposición 2.1.7

$$\begin{aligned}
\|T\| &= \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \sup_{\|y\|=1} |\langle T(x), y\rangle| = \sup_{\|y\|=1} \sup_{\|x\|=1} |\langle T(x), y\rangle| \\
&= \sup_{\|y\|=1} \|T_y\|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto T es acotado. □

Ejemplo 2.2.14. Sea $X := L_2[0,1]$ y $T : X \to X$ definido como

$$Tx(t) := \int_0^1 k(s,t)x(s)ds, \; t \in [0,1],$$

donde k es continua en $[0,1] \times [0,1]$. Resulta que T es acotado y existe un único adjunto. Para encontrar T^* usamos que $\langle T^*x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$, i.e.

$$\int_0^1 T^*x(s)\overline{y(s)}ds = \int_0^1 x(s)\overline{\int_0^1 k(t,s)y(t)dt}ds$$

(y usando los Teoremas de Fubini y de Tonelli, vea el apéndice)

$$= \int_0^1 \int_0^1 \overline{k(t,s)}x(s)ds\overline{y(t)}dt.$$

Por lo tanto $T^*x(t) = \int_0^1 \overline{k(t,s)}x(s)ds, \; t \in [0,1]$.

Ahora queremos encontrar una base ortonormal para $L_2[-\pi,\pi]$ y ver la relación entre bases completas y conjuntos densos. Para estos fines tenemos primero algunos resultados que son además de interés general.

Proposición 2.2.15. *Sea $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ conjunto ortonormal en un espacio X con producto interno. Si $u := \sum_{k=1}^\infty c_k e_k$ es convergente en X, entonces $c_k = \langle u, e_k\rangle$.*

Demostración. Para $m \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\langle u, e_m \rangle = \langle \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, e_m \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, e_m \rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k \langle e_k, e_m \rangle = c_m.$$

□

Proposición 2.2.16. *Sea X un espacio de Hilbert, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ un conjunto ortonormal y $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$. Entonces $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ es convergente si y solo si $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ es convergente.*

Demostración. Primero, si $u := \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ es convergente, por la proposición anterior, $c_k = \langle u, e_k \rangle,\ k = 1, 2, \ldots$; y por la desigualdad de Bessel $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|u\|^2 < \infty$. Para suficiencia notemos que para $n > m$,

$$\| \sum_{k=1}^{n} c_k e_k - \sum_{k=1}^{m} c_k e_k \|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2.$$

□

Teorema 2.2.17. *El conjunto*

$$E := \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

es ortonormal y $\langle E \rangle$ es denso en $X := L_2[-\pi, \pi]$, por lo que E es también una base de X.

Para mostrar este teorema usaremos los siguiente hechos:
i) Que $C[-\pi, \pi]$ es denso en X con la norma $\| \cdot \|_2$.
ii) Del Teorema de Weierstrass, $\langle E \rangle$ es denso en $\{f \in C[-\pi, \pi] : f(-\pi) = f(\pi)\}$ con la norma $\| \cdot \|_\infty$.
Demostración. Sea $u \in X$ y $\epsilon > 0$. Por el punto *i*) anterior, hay $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ continua tal que $\|u - f\|_2 < \epsilon/2$. Más aún, podemos suponer que $f(-\pi) = f(\pi)$. Ahora, por *ii*), hay $g \in \langle E \rangle$ tal que $\|f - g\|_2 \leq 2\pi \|f - g\|_\infty^2 < \epsilon/2$, luego $\|u - g\|_2 < \epsilon$. Por lo tanto $\langle E \rangle$ es denso en X. Usando usando las siguientes identidades se puede mostrar la ortogonalidad:

$$\begin{aligned}
\sin(a)\sin(b) &= \frac{1}{2}\cos(a-b) - \frac{1}{2}\cos(a+b), \\
\cos(a)\cos(b) &= \frac{1}{2}\cos(a-b) + \frac{1}{2}\cos(a+b), \\
\sin(a)\cos(b) &= \frac{1}{2}\sin(a-b) + \frac{1}{2}\sin(a+b).
\end{aligned}$$

□

Con lo anterio podemos concluir lo siguiente.

Corolario 2.2.18. *Se tiene que* $L_2[-\pi,\pi]$ *es separable.*

Corolario 2.2.19. *Para toda* $f \in L_2[-\pi,\pi]$,

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t),\ \ t \in [-\pi,\pi],$$

donde $p_k(t) := a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$ *y*

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\cos(ks)ds,$$

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\sin(ks)ds,\ \ y$$

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(s)ds.$$

A las combinaciones finitas de las funciones p_k's se les llaman los polinómios trigonométricos.

2.3. Otros resultados en espacios de Hilbert

Veamos primero esta construcción de un espacio de Hilbert como suma direca de otros. Note que las normas y productos internos pueden ser diferentes pero se abusa de la notación.

Proposición 2.3.1. *Sean* $X_1, X_2, \ldots$ *una sucesión de espacios de Hilbert, y defina el conjunto*

$$X := \{\{f_n\}_{n=1}^{\infty} : f_n \in X_n, \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|^2 < \infty\}.$$

Entonces X *es un espacio de Hilbert con el producto interno*

$$\langle f, g\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} \langle f_n, g_n\rangle,$$

donde $f = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *y* $g = \{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ *son elementos en* X. *En este caso se usa la notación* $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots$.

Demostración. Usando la siguiente desigualdad se puede mostrar lo deseado:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f_n, g_n \rangle| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| \|g_n\| \leq \sqrt{\sum \|f_n\|^2} \sqrt{\sum \|g_n\|^2}.$$

□

Ahora veamos algo sobre operadores Hilbert-Schmidt.

Proposición 2.3.2. *Sea X un espacio de Hilbert separable, $\{e_n\}$ and $\{h_n\}$ dos bases ortonomales y $T : X \to X$ un operador acotado. Entonces se cumple*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|Th_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle Te_n, h_k \rangle|^2.$$

Definición 2.3.3. Con las condiciones anteriores, se dice que T es un operador **Hilbert-Schmidt** (HS) si

$$\|T\|_2 := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2} < \infty.$$

Proposición 2.3.4. *Con las condiciones anteriores se tiene que*
i) $\| \bullet \|_2$ es una norma para el conjunto de operadores HS.
ii) Para todo T acotado $\|T\| \leq \|T\|_2$.
iii) Si T es HS, $\|T^*\|_2 = \|T\|_2$.
iv) Si L es acotado y T es HS, entonces TL y LT son HS, y $\|T\|_2 \|L\|$ es cota superior para la norma $\| \bullet \|_2$ de ambos.

Ejemplo 2.3.5. En $X := L_2[a, b]$ cualquier operador integral $T : X \to X$ con kernel $K \in L_2([a, b] \times [a, b])$ es un operador HS, y además

$$\|T\|_2^2 = \|K\|^2 = \int |K(x, y)|^2 dxdy.$$

Veremos a continuación unas ideas básicas sobre espacios de Hilbert con núcleo reproductor, abreviado RKHS por sus siglas en inglés. Dado un conjunto Ω, trabajaremos con el espacio vectorial $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K})$ de funciones sobre Ω valuadas en $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definición 2.3.6. Un conjunto $X \subset \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K})$ es un **espacio de Hilbert con núcleo reproductor**, si X es un espacio de Hilbert y la evaluación $E_z : X \to \mathbb{K}$ es un funcional continuo para todo $z \in \Omega$.

Por el Teorema de representación de Riesz, para cada $z \in \Omega$ fija existe $h_z \in X$ tal que

$$(\forall f \in X) f(z) = E_z(f) = \langle f, h_z \rangle.$$

Entonces podemos definir $K(z, w) := h_z(w)$, al cual lo llamamos **núcleo reproductor**, precisamente porque reproduce a cualquier elemento f mediante la ecuación $f(z) = \langle f, K(z, \bullet) \rangle$.

Lo primero que observamos es que

$$K(z, w) = h_z(w) = \langle h_z, h_w \rangle$$

y que

$$\|E_z\|^2 = \|h_z\|^2 = \langle h_z, h_z \rangle = K(z, z).$$

Ejemplo 2.3.7. Sea $\Omega := [0, 1]$ y $X := L_2(\Omega)$. Al fijar $x \in \Omega$, será posible que si $\|f_n - f\| \to 0$ implique que $|f_n(x) - f(x)| \to 0$? Note que si $f = 1$ y $f_n = I_{\Omega \bigcap \mathbb{Q}}$, efectivamente $f_n \to f$. Pero al tomar $x \in \Omega$ irracional $E_x(f) - E_x(f_n) = 1$, por lo que la funcional E_x no es continua. Por tal motivo X no es RKHS.

Ejemplo 2.3.8. Consideremos $\Omega := \{1, 2, \ldots, n\}$ y $X := \{f : \Omega \to \mathbb{C}\} = \mathbb{C}^n$. Luego el producto interno de X es

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{n} f(i)\overline{g(i)}.$$

Se verificar que X es efectivamente un RKHS, y su núcleo es $K(i, k) = \delta_{i,k}$.

Ejemplo 2.3.9. Ahora consideremos $\Omega := \{1, 2, \ldots\}$ y $X := l_2(\Omega)$, por lo que el producto interno es

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} f(i)\overline{g(i)}.$$

Similarmente se tiene que X es un RKHS, y también $K(i, k) = \delta_{i,k}$.

Ejemplo 2.3.10. Consideremos el disco unitario $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ como el dominio Ω, y tomemos

$$X := \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ y } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}.$$

Resulta que X es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n},$$

donde $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Luego la norma esta dada por

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2}.$$

En este caso X se llama el espacio de **Hardy-Hilbert** y se denota usualmente como $H^2(\mathbb{D})$. Notemos que existe un isomorfismo natural entre $H^2(\mathbb{D})$ y l_2 dado por $f \mapsto \{a_n\}$. Lo cual ayuda a ver que $H^2(\mathbb{D})$ es un espacio de Hilbert separable. Para ver que X es efectivamente un RKHS tenemos que

$$\begin{aligned} |E_z(f)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z|^n \\ &\leq \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2} \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |z|^{2n}} = \frac{\|f\|}{\sqrt{1 - |z|^2}}. \end{aligned}$$

Para calcular el núcleo notemos que

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n = \langle f, g \rangle,$$

donde $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ con $b_n := \overline{w}^n$. En otras palabras $h_w(z) = g(z)$, por lo que

$$K(z, w) = h_w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{w}^n z^n = \frac{1}{1 - \overline{w} z},$$

el cual se conoce como el núcleo de **Szëgo**.

Otros ejemplos conocidos son los espacios de Bergman, de Paley-Wiener y de de-Branges.

Proposición 2.3.11. *El núcleo reproductor cumple las siguiente propiedades*

$$\begin{array}{rl} i) & K(z,z) \geq 0, \\ ii) & K(z,w) = \overline{K(w,z)}, \\ iii) & |K(z,w)|^2 \leq K(z,z)K(w,w). \end{array}$$

Proposición 2.3.12. *Sea X un RKHS separable y $\{e_n\}$ una base ortonormal. Entonces*

$$K(z,w) = \sum \overline{e_n(z)} e_n(w).$$

Demostración. Como $h_w \in X$, hay únicos escalares α_n tal que $h_w = \sum \alpha_n e_n$. Pero resulta que $\alpha_n = \overline{e_n(w)}$. □

En general es posible caracterizar los núcleos reproductores con las matrices positivas definidas. Esto es parte del Teorema de Moore-Aronszajn, el cual dice que un K es un núcleo reproductor de algún RKHS si y solo si para cualquier colección finita $\{z_1, \ldots, z_n\} \subset \Omega$ se tiene que

$$(\forall u := (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^T \in \mathbb{C}^n) \; u^T M \overline{u} \geq 0,$$

donde M es la matriz $n \times n$ con entradas $K(z_i, z_j)$.

Capítulo 3

Álgebras de Banach

3.1. Teoria esencial

Definición 3.1.1. Un **álgebra** sobre un campo $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial X (sobre $\mathbb{K}$) con multiplicación que lo vuelve anillo, en el cual

$$\lambda(xy) = x(\lambda y) = (\lambda x)y,$$

para $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Es decir, se cumple $(\forall x, y, z \in X)$
i) $x(y+z) = xy + xz$ (**ley distributiva por la derecha**),
ii) $(x+y)z = xz + yz$ (**ley distributiva por la izquierda**),
iii) $x(yz) = (xy)z$ (**multiplicación asociativa**).

En lo que resta de la sección, nos restringimos al caso en que $\mathbb{K} := \mathbb{C}$ ó $\mathbb{R}$.

Definición 3.1.2.
i) Se dice que un álgebra X **tiene unidad** si hay **identidad multiplicativa** (**neutro multiplicativo**), el cual es denotado como 1, i.e. $(\exists 1 \in X)x1 = 1x = x$ para todo $x \in X$.
ii) Un **álgebra normada** es un álgebra X con una norma $\| \bullet \|$ para la cual

$$(x, y \in X)\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \tag{3.1}$$

y si X tiene unidad, $\|1\| = 1$.
ii) Un **álgebra de Banach** es una algebra normada completa; es **conmutativa** si la multiplicación lo es.

Notemos que la propiedad ii) implica que la multiplicación es un mapeo continuo, además

Ejemplo 3.1.3.
i) Los números complejos son una álgebra de Banach conmutativa.
ii) Sea S compacto y de Hausdorff, entonces $(C(S), \| \bullet \|_\infty)$ forma un álgebra de Banach conmutativa, con la suma y multiplicación definidas puntalmente.
iii) Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida $\sigma - finita$, entonces $L_\infty(X)$ es una álgebra de Banach conmutativa.
iv) Sea X un espacio de Banach, entonces $\mathcal{L}^*(X)$ es una algebra de Banach con unidad, donde la multiplicación está dada por la composición y, la suma por la suma puntual.

Ejemplo 3.1.4. Considere $X =: L^1(\mathbb{Z}, P(\mathbb{Z}), \nu)$, donde ν es medida de conteo. Dicho espacio está dado por

$$X = \left\{ (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_k| < \infty \right\},$$

y considere la multiplicación dada por la convolución

$$x * y := (\ldots, (x*y)_{-1}, (x*y)_0, (x*y)_1, \ldots),$$

donde la $n-$ésima entrada es

$$(x*y)_n := \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{n-k} y_k.$$

Notemos que

$$\|x\|_1 \|y\|_1 = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k| \right) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |y_k| \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_{n-k}| \times |y_k| = \|x*y\|_1.$$

Se puede verificar también la asociatividad:

$$(x*y)*z = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{n-k} y_k \right)_{n=-\infty}^{\infty} * z = \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{n-i-k} y_k \right) z_i \right] \right)_{n=-\infty}^{\infty}$$

$$= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[x_{n-k} \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} y_{k-i} z_i \right) \right] \right)_{n=-\infty}^{\infty} = x*(y*z).$$

Se puede verificar las demás propiedades para poder afirmar que dicho espacio X con la convolución como multiplicación y la suma entrada por entrada, forma una algebra de Banach conmutativa con unidad.

En lo sucesivo X es una álgebra de Banach con unidad.

Definición 3.1.5. Un elemento x es **invertible** si $(\exists y \in X) xy = 1 = yx$, el cual es denotado como x^{-1}. Definimos $GL(X) := \{x \in X : x \text{ es invertible}\}$.

Proposición 3.1.6. *(Propiedades de $GL(X)$)*

i) *Un inverso es único*

ii) $0 \notin GL(X)$

iii) *Si $x, y \in GL(X)$ entonces $xy \in GL(X)$*

iv) *Si $x, xy \in GL(X)$ entonces $y \in GL(X)$*

v) *Si $xy, yx \in GL(X)$ entonces $x, y \in GL(X)$*

Demostración. ***i)*** Sea $x \in GL(X)$ y supongamos que existen $y_1, y_2 \in X$ inversos de x. Entonces

$$y_1 = y_1 \cdot 1 = y_1 \cdot (x \cdot y_2) = (y_1 \cdot x) \cdot y_2 = 1 \cdot y_2 = y_2.$$

Por que en efecto el inverso es único.
ii) Supongamos ahora que $0 \in GL(X)$, entonces

$$0 = 0 \cdot 0^{-1} = 1$$

una contradicción.
iii) Si $x, y \in GL(X)$, entonces existen sus inversos $x^{-1}, y^{-1} \in GL(X)$. Luego

$$\begin{aligned}(xy)(y^{-1}x^{-1}) &= x \cdot 1 \cdot x^{-1} = xx^{-1} = 1\\ (y^{-1}x^{-1})(xy) &= y^{-1} \cdot 1 \cdot y = y^{-1}y = 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto $xy \in GL(X)$ y más aún se tiene que $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.
iv) Si $x, xy \in GL(X)$ entonces existen sus inversos $x^{-1}, (xy)^{-1} \in GL(X)$. Definamos el elemento $z := y(xy)^{-1}x$, entonces al multiplicar por x por la izquierda se tiene que $xz = x$, entonces si multiplicamos por x^{-1} por la izquierda se tiene que $z = 1$, es decir que

$$y(xy)^{-1}x = 1.$$

Claramente $(xy)^{-1}xy = 1$, por lo que en efecto $y \in GL(X)$ y además $y^{-1} = (xy)^{-1}x$.
v) Si $xy, yx \in GL(X)$ entonces existen sus inversos $(xy)^{-1}, (yx)^{-1} \in GL(X)$. Claramente se tiene $x \cdot y(xy)^{-1} = 1 = y \cdot x(yx)^{-1}$. Sea $z := y(xy)^{-1}x$ entonces $xz = x$ lo que implica que $xzy(xy)^{-1} = 1$, es decir que $xzy = xy$, de donde se obtiene que $z = 1$, o sea

$$y(xy)^{-1} \cdot x = 1.$$

De manera similar obtenemos que $x(yx)^{-1} \cdot y = 1$. Concluimos entonces que $x, y \in GL(X)$ con $x^{-1} = y(xy)^{-1}$ y $y^{-1} = x(yx)^{-1}$. □

Proposición 3.1.7. *Si $\|y\| < 1$, entonces $1 - y$ es invertible y de hecho*

$$(1-y)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} y^k.$$

Además, $\|(1-y)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|y\|}$.

Demostración. Se tiene que $z_n := \sum_{k=0}^{n} y^k$ converge absolutamente, pues $\|y^k\| \leq \|y\|^k$. También

$$z_n(1-y) = \sum_{k=0}^{n} y^k - \sum_{k=0}^{n} y^{k+1} = 1 - y^{n+1} = (1-y)z_n,$$

lo cual converge a 1 cuando $n \to \infty$, así que definimos $(1-y)^{-1} := \lim_{n\to\infty} z_n$. Para acotar la norma de $(1-y)^{-1}$ se ocupa la propiedad (3.1) para llegar a una suma geométrica. □

Corolario 3.1.8.
i) Se tiene que $B_1(1) \subset GL(X)$.
ii) Para $x \in GL(X)$, sea $r := \frac{1}{\|x^{-1}\|}$, entonces

$$B_r(x) \subset GL(X).$$

Demostración. Para i) notemos que $B_1(1) = 1 + B_1(0)$, o sea que todo $x \in B_1(1)$ es de la forma $1 - y$ con $\|y\| < 1$, luego podemos aplicar la proposición anterior.

(ii) Sea $y \in B_{1/\|x^{-1}\|}(x)$, o sea que $\|y - x\| < 1/\|x^{-1}\|$, es decir $\|x^{-1}\|\|x - y\| < 1$, por lo que $\|x^{-1}(x-y)\| < 1$, es decir $\|1 - x^{-1}y\| < 1$. Así, usando la proposición anterior, $1 - (1 - x^{-1}y) = x^{-1}y \in GL(X)$, y por la Proposición 3.1.6 $y \in GL(X)$. □

Nota 3.1.9. Observemos que

$$xB_1(1) = x - xB_1(0) \neq x - \|x\|B_1(0) = B_{\|x\|}(x).$$

Proposición 3.1.10. *El conjunto $GL(X)$ es abierto en X y el mapeo $inv : x \mapsto x^{-1}$ es un homeomorfismo de $GL(X)$.*

Demostración. Por i) del corolario anterior, $GL(X)$ es abierto. Claramente inv es biyectivo, veamos que es continuo para todo $x \in GL(X)$. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$; queremos demostrar que $(\epsilon > 0)(\exists N > 0)$

$$\|inv(x_n) - inv(x)\| = \|x_n^{-1} - x^{-1}\| \leq \epsilon \text{ cuando } n > N.$$

Sea M tal que $\|x_n - x\| \leq \frac{1}{2\|x^{-1}\|}$ para $n > M$. Entonces, para $n > M$, tenemos que

$$\|x_n^{-1}\| - \|x^{-1}\| \leq \|x_n^{-1} - x^{-1}\| = \|x_n^{-1}(x - x_n)x^{-1}\| \leq \|x_n^{-1}\|\|x_n - x\|\|x^{-1}\| \leq \frac{1}{2}\|x_n^{-1}\|,$$

lo cual implica que $\|x^{-1}\| \geq \frac{1}{2}\|x_n^{-1}\|$ para $n > M$. Así que, para $n > M$,

$$\|x_n^{-1} - x^{-1}\| = \|x_n^{-1}(x - x_n)x^{-1}\| \leq \|x_n^{-1}\|\|x_n - x\|\|x^{-1}\| \leq 2\|x^{-1}\|^2\|x - x_n\|.$$

Así que podemos escoger N que cumpla lo requerido.

Hemos pues demostrado que inv es continua en cualquier punto de $x \in GL(X)$, o sea que también es continua en el punto x^{-1}. Esto es: si tenemos $\{x, \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\} \subset GL(X)$ tal que $x_n^{-1} \to x^{-1}$ cuando $n \to \infty$, podemos efectuar el mismo procedimiento para mostar que $x_n = inv^{-1}(x_n^{-1}) \to inv^{-1}(x^{-1}) = x$ cuando $n \to \infty$, lo cual demuestra que la inversa de inv es también continua. Por lo tanto $inv : GL(X) \to GL(X)$ es un homeomorfismo. $\square$

En lo que resta de esta sección nos restringimos al campo $\mathbb{C}$.

Definición 3.1.11. i) El **espectro** de $x \in X$ es

$$\sigma(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda \notin GL(X)\}.$$

ii) El **radio espectral** es

$$r(x) := \sup_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda|.$$

iii) El **conjunto resolvente** es $\rho(x) := \mathbb{C} - \sigma(x)$.

En la definición anterior, escribimos $x-\lambda$ para denotar $x-\lambda 1$ en X.

Ejemplo 3.1.12. Sea X el conjunto de matrices $n\times n$ en $\mathbb{C}$. Para $A\in X$, $\sigma(A)=\{\text{valores propios de } A\}$.

Proposición 3.1.13. *Sea $x\in X$, entonces $r(x)\leq \|x\|$ y $\sigma(x)$ es compacto.*

Demostración. Definamos $g_x(\lambda):=x-\lambda$ para $\lambda\in\mathbb{C}$, la cual es una función continua. Luego $g_x^{-1}(GL(X))$ es abierto, y su complemento, que es $\sigma(x)$, es cerrado. Si $|\lambda|>\|x\|$, entonces $1-x/\lambda\in B_1(1)$, luego $\lambda-x\in GL(X)$, por lo que $\lambda\notin\sigma(x)$. Esto implica que $r(x)\leq\|x\|$. También tenemos que

$$\sigma(x)\subset\overline{B_{\|x\|}(0)},$$

por lo tanto $\sigma(x)$ es compacto, pues es cerrado dentro de un compacto. □

Proposición 3.1.14. *Sea $f\in X^*$ y $x\in X$, entonces $H(\lambda):=f(\lambda-x)^{-1}$ es holomorfa en $\mathbb{C}-\sigma(x)$.*

Demostración. Sea $\lambda,\lambda'\in\rho(x)$ se tiene que

$$\frac{1}{\lambda'-\lambda}(H(\lambda')-H(\lambda))=f\left((\lambda'-\lambda)^{-1}\left[(\lambda'-x)^{-1}-(\lambda-x)^{-1}\right]\right)$$

$$\begin{aligned} &= f\left((\lambda'-\lambda)^{-1}\left[(\lambda'-x)^{-1}[(\lambda-x)-(\lambda'-x)](\lambda-x)^{-1}\right]\right)\\ &= -f((\lambda'-x)^{-1}(\lambda-x)^{-1}),\end{aligned}$$

la cual converge a $-f((\lambda-x)^{-2})$ cuando $\lambda'\to\lambda$. Esto ocurre porque tenemos una composición de f con *inv*, lo que da una función continua en $\rho(x)$. □

Teorema 3.1.15. ***(Fórmula del radio espectral)*** *Sea X una álgebra de Banach con unidad. Para toda $x\in X$, $r(x)=\lim_{n\to\infty}\|x^n\|^{1/n}$.*

Demostración. Para $\lambda\in\mathbb{C}$ y n entero positivo. Notemos que

$$x^n-\lambda^n=(x-\lambda)\left(\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k x^{n-k}\right)=\left(\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k x^{n-k}\right)(x-\lambda).$$

Así, $\lambda^n\notin\sigma(x^n)\Rightarrow\lambda\notin\sigma(x)$, esto surge de lo siguiente. Si $z\in GL(X)$ y $z=uv=vu$, entonces $1=(z^{-1}u)v=v(uz^{-1})$, además

$$z^{-1}u=z^{-1}u1=z^{-1}uvuz^{-1}=1uz^{-1}=uz^{-1},$$

por lo que v sería invertible también.

Entonces también se cumple que $\lambda \in \sigma(x) \Rightarrow \lambda^n \in \sigma(x^n)$, es decir $|\lambda^n| \leq \|x^n\|$ (ó sea $|\lambda| \leq \|x^n\|^{1/n}$). Luego, tomamos el supremo sobre λ en $\sigma(x)$ y el límite inferior cuando $n \to \infty$,

$$r(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}.$$

Por otro lado vemos que si $|\lambda| < 1/r(x)$, entonces $\frac{1}{\lambda} \notin \sigma(x)$, por lo que

$$(\forall f \in X^*) f((1-\lambda x)^{-1})$$

es holomorfa en $A := \left\{\lambda : 0 \leq |\lambda| < \frac{1}{r(x)}\right\}$, pues $1 - \lambda x = \lambda(\frac{1}{\lambda} - x)$. Además, si $|\lambda| < 1/\|x\|$ (o sea que $|\lambda| \leq 1/r(x)$), entonces

$$f((1-\lambda x)^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k f(x^k),$$

y por la unicidad de la serie de Lauret, dicha expansión es válida en todo A. Esto es, la serie converge para todo $\lambda \in A$, lo que implica que $(\lambda x)^k \overset{w}{\to} 0$ cuando $k \to \infty$. Así, por la Proposición 1.5.3, hay $M < \infty$ tal que $\|(\lambda x)^k\| \leq M$ para $k = 1, 2, \ldots$. De esto se tiene que

$$\|x^k\|^{1/k} \leq \frac{1}{|\lambda|} M^{1/k}$$

para $k = 1, 2, \ldots$ y $\lambda \in A$. Tomando el límite superior en k y después el ínfimo en λ, se tiene

$$\limsup_{k\to\infty} \|x^k\|^{1/k} \leq r(x) \therefore r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}.$$

$\square$

Un resultado revelador es el siguiente, el cual nos indica como ciertas álgebras son realmente los números complejos.

Teorema 3.1.16. ***(Teorema de Gelfand-Mazur)*** *Sea X un álgebra de Banach (con campo $\mathbb{C}$) con unidad. Si $GL(X) = X - \{0\}$, entonces X es isométricamente isomorfo a $\mathbb{C}$.*

Para mostrar este resultado hay que probar primero que el espectro de cualquier elemento nunca es vacio. Del resultado anterior se concluye también que X es conmutativo.

3.2. Ideales y homomorfismos

Definición 3.2.1. Sea X un álgebra de Banach. Un **ideal** en X es un subespacio lineal $A \subset X$ y tal que $(\forall x \in X) xA \subseteq A,\ Ax \subseteq A$.

Ejemplo 3.2.2. Considere $X := C[0,1]$ y $x_1, \ldots, x_n \in [0,1]$. Un ideal en X es $A := \{f \in X : f(x_i) = 0, i = 1, \ldots, n\}$.

En lo sucesivo X es un álgebra de Banach con unidad.

Proposición 3.2.3.
i) Si A es ideal propio de X, entonces $A \bigcap GL(X) = \emptyset$
ii) Si A es un ideal propio de X, entonces $\overline{A}$ también es ideal propio.

Demostración. (i) Si $y \in GL(A) \bigcap A$, entonces, como A es ideal, $yy^{-1} = 1 \in A$, lo que implica que cualquier elemento de X está en A, pero esto no puede ocurrir porque A está contenido propiamente.
(ii) Por el inciso i), $A \subseteq GL(X)^c$, entonces $\overline{A} \subset GL(X)^c$ (porque $GL(X)^c$ es cerrado); esto nos da la contención estricta de $\overline{A}$ en X. Ahora verifiquemos la propiedad de ideal. Notemos que si $a_n \to a$ en $\overline{A}$ cuando $n \to \infty$, también $xa_n \to xa$ y $a_n x \to ax$ en $\overline{A}$ cuando $n \to \infty$ para cualquier $x \in X$, por lo tanto ax y xa están en $\overline{A}$. □

Definición 3.2.4. El conjunto de ideales máximos de X es denotado $\mathcal{M}(X)$.

Nota 3.2.5.
i) La existencia de idealas máximos es concecuencia del Lema de Zorn.
ii) De la proposición anterior tenemos que todo ideal máximo es cerrado.

Definición 3.2.6. Un **homomorfismo** entre 2 álgebras de Banach X y Y es una funcional lineal $f : X \to Y$ que preserva multiplicación, i.e. $f(xy) = f(x)f(y)$ para todo $x, y \in X$; se dice también que f es **multiplicativa**. En particular, si $Y = \mathbb{C}$, se dice que f es un **homomorfismo complejo**.El conjunto de homomorfismos complejos en X lo denotamos $Mult(X)$.

Nota 3.2.7. En un álgebra de Banach con unidad, un homomorfismo complejo cumple que $f(1) = 1$ y $f(x^{-1}) = \frac{1}{f(x)}$ cuando $x \in GL(X)$.

Proposición 3.2.8. *Sea X un álgebra de Banach con unidad y f un homomorfismo complejo. Entonces f es acotado y $\|f\| = 1$.*

Demostración. Si $x \in X$ y $f(x) \neq 0$, entonces $f\left(1 - \frac{x}{f(x)}\right) = 0$. Luego, de la nota anterior $1 - \frac{x}{f(x)} \notin GL(X)$, por lo que $\|x/f(x)\| \geq 1$, es decir $\|x\| \geq |f(x)|$, por lo tanto f es acotada. Además $|f(1)| = 1$, luego $\|f\| = 1$. □

Teorema 3.2.9. *Sea X un álgebra de Banach y A un ideal propio y cerrado de X. Entonces,*
i) el espacio cociente X/A es un álgebra de Banach,
ii) si X tiene unidad, también X/A,
iii) el mapeo $\Pi : x \mapsto x + A$ es un homomorfismo sobreyectivo y con espacio nulo A.

Demostración. Defina la multiplicación en X/A como $(x+A)(y+A) := xy + A$ para todo $x, y \in X$.
Para i) ya sabemos que X/A es un espacio de Banach. Se puede verificar las propiepades distributivas y asociativas de la multiplicación en X/A. Ahora queremos verificar que

$$\|(x + A)(y + A)\| \leq \|x + A\|\|y + A\|.$$

Sean $u, v \in A$, luego $(x+u)(y+v) = xy+xv+uy+uv$, pero $xv+uy+uv \in A$. Así,

$$\|(x + A)(y + A)\| \leq \|xy + xv + uy + uv\| \leq \|x + u\|\|y + v\|,$$

y tomando infimos sobre u y v se obtiene la desigualdad requerida. Por lo tanto X/A es un álgebra de Banach.

Para ver ii), notemos $1 + A$ cumple la condición de ser neutro multiplicativo. Además, como $0 \in A$ se tiene que $\|1 + A\| \leq 1$. Más aún, no existe $x \in A$ con $\|1-x\| < 1$, de lo contrario $x \in GL(X)$, y por i) de la Proposición 3.2.3, A no sería propio, por lo que podemos concluir que $\|1 + A\| = 1$.

Para iii), ya sabemos que tal mapeo es sobre y lineal. Cumple que $\|\Pi(x)\| \leq \|x\|$, por lo tanto es acotada. Claramente $N(\Pi) = A$, y la propiedad multiplicativa se sigue de la definición. □

Teorema 3.2.10. *Sea X una álgebra de Banach (sobre $\mathbb{C}$) conmutativa con unidad, y $A \in \mathcal{M}(X)$. Entonces X/A es isometricamente isomorfo a $\mathbb{C}$.*

Demostración. Ya sabemos que X/A es un álgebra de Banach con unidad. Ahora basta probar que todo elemento en $X/A - \{0 + A\}$ es invertible, para luego usar el Teorema de Gelfand-Mazur.

Sea $x + A \in X/A$ con $x \notin A$. Definamos

$$A' := \{zx + y : z \in X, y \in A\} = xX + A.$$

Obervamos que A' es un ideal y que contiene propiamente a A. Como A es máximo, $A' = X$, por lo que existen $u \in X$ y $v \in A$ tal que $ux+v = 1 = xu+v$ (usando la conmutatividad). Así, $(x + A)(u + A) = (u + A)(x + A) = 1 + A$. $\square$

Teorema 3.2.11. *Sea X un álgebra de Banach (sobre $\mathbb{C}$) conmutativa con unidad. Entonces,*
i) para toda $f \in Mult(X)$, se tiene que $N(f) \in \mathcal{M}(X)$, y
ii) para todo $A \in \mathcal{M}(X)$, existe $f \in Mult(X)$ con $N(f) = A$.

Demostración. i) Ya sabemos que $N(f)$ es un subespacio cerrado, y podemos ver que es un ideal, pues $f(xy) = f(x)f(y) = 0$ para todo $y \in N(f)$ y $x \in X$. Veamos que para X espacio de Banach (sobre el campo $\mathbb{C}$) y $f \in X^*$, se tiene $X/N(f)$ es isométricamente isomorfo a $\mathbb{C}$. En efecto, considerando el mapeo $h : X/N(f) \to \mathbb{C}$, definido como $h(x + N(f)) = f(x)$, se tiene un isomorfismo isométrico.

Asi, $N(f)$ tiene que ser ideal maximal. De lo contrario, existe ideal maximal M que contiene a $N(f)$, luego $X/N(f) \neq X/M$. Pero por el teorema anterior X/M es isomorfo a $\mathbb{C}$, contradiciendo que $X/N(f)$ también lo es.
ii) Sea $A \in \mathcal{M}(X)$. Por el teorema anterior, existe $P : X/A \to \mathbb{C}$ isomorfismo isométrico. Por otro lado, sea $\Pi : X \to X/A$ el homomorfismo del Teorema 3.2.9. Se tiene que $P \circ \Pi : X \to \mathbb{C}$ cumple lo deseado. $\square$

Capítulo 4

Teoría de Operadores

Definición 4.0.1. i) Sean X y Y ELNs. Un **operador** de X a Y es un par $(D(T), T)$ donde $D(T) \subseteq X$ y $T : D(T) \to Y$.
ii) Se dice que es **lineal** cuando $D(T)$ es subespacio lineal de X y T es lineal en $D(T)$.
iii) A $D(T)$ se le llama el **dominio** de T y a $R(T) := T(D(T))$ la **imagen**.
iv) La **gráfica** de T es

$$Gr(T) := \{(x, y) : x \in D(T), y = T(x)\} \subset X \times Y.$$

Se dice que T es **cerrado** si $Gr(T)$ es cerrado en $X \times Y$.

Definición 4.0.2. Sean T_1 y T_2 dos operadores.
i) La **suma** $(T_1+T_2)(x)$ es $T_1(x)+T_2(x)$ con $x \in D(T_1+T_2) := D(T_1) \bigcap D(T_2)$.
ii) La **composición** $(T_1 \circ T_2)(x)$ es $T_1(T_2(x))$ con

$$x \in D(T_1 \circ T_2) := \{x \in D(T_2) : T_2(x) \in D(T_1)\};$$

también lo denotamos T_1T_2.
iii) Se dice que T_2 es **extensión** de T_1 (denotado $T_1 \subset T_2$) si $D(T_1) \subset D(T_2)$ y $T_2 \mid_{D(T_1)}= T_1$ (i.e. $T_2(x) = T_1(x)$ para todo $x \in D(T_1)$).

4.1. Operadores adjuntos

Sean X y Y ELNs, y sea $T : X \to Y$ lineal con $D(T) = X$. Dada $g \in Y^{\#}$, podemos considerar $g \circ T$, la cual está en $X^{\#}$. Así, podemos definir el adjunto

$$T^* : Y^{\#} \to X^{\#} \text{ como } T^*(g) := g \circ T.$$

Recordemos que en el contexto de espacios de Hilbert escribimos $\langle x, T^*(y)\rangle = \langle T(x), y\rangle$. Este nuevo contexto, si f es un funcional de X, escribimos

$$\langle x, f\rangle := f(x),$$

por lo que

$$\langle T(x), g\rangle = g(T(x)) = (g \circ T)(x) = \langle x, T^*(g)\rangle.$$

Definición 4.1.1. Sea $D(T)$ denso en X. Se define el **operador adjunto** $T^* : Y^* \to X^*$ como

$$T^*(g) := g \circ T \text{ donde } g \in D(T^*) := \{f \in Y^* : f \circ T \text{ es acotada en } D(T)\}.$$

Nota 4.1.2. i) Esta definición puede no coincidir con la definición de adjunto en espacios de Hilbert. Por ejemplo, en dimensión finita con campo $\mathbb{C}$, el adjunto de una matriz daría la traspuesta en lugar de la transpuesta conjugada.
ii) Dada $g \in D(T^*)$, la extensión de Hahn-Banach de $g \circ T$ en todo X es única por ser $D(T)$ denso.
iii) También notemos que $D(T^*)$ no tiene que ser denso en Y^*, así que T^{**} puede no estar bien definido.

Teorema 4.1.3. *Si $D(T) = X$ y T es acotada, entonces $D(T^*) = Y^*$ y $\|T^*\| = \|T\|$.*

Demostración. Notemos que $(\forall g \in Y^*)(\forall x \in X)\|(g \circ T)(x)\| \leq \|g\|\|T\|\|x\|$ $\therefore D(T^*) = Y^*$. También $\|T^*(g)\| \leq \|g \circ T\| \leq \|g\|\|T\|$. Además, T^{**} está bien definido y aplicando lo anterior $\|T^{**}\| \leq \|T^*\|$.

Como $T^{**} : X^{**} \to Y^{**}$, se tiene que $T^{**}(eval_x) \in Y^{**}$ y su dominio es Y^*. Luego, para todo $g \in Y^*$, $T^{**}(eval_x)(g) = (eval_x \circ T^*)(g) = eval_x(T^*(g)) = eval_x(g \circ T) = g(T(x)) = eval_{T(x)}(g) \therefore \|T^{**}(eval_x)\| = \|T(x)\|$. De esto se tiene que $\|T\| \leq \|T^{**}\|$, por lo que $\|T\| = \|T^{**}\|$. $\square$

Corolario 4.1.4. *El mapeo $T \mapsto T^*$ es una isometría.*

Proposición 4.1.5. *El mapeo $T \mapsto T^*$, $\mathcal{L}^*(X, Y) \to \mathcal{L}^*(Y^*, X^*)$, es lineal e inyectiva.*

En los siguientes resultados, X y Y son espacios de Banach, y $T \in \mathcal{L}^*(X, Y)$.

Proposición 4.1.6. *Si T es biyectiva, entonces $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.*

Demostración. Se tiene que T es invertible por ser biyectiva, y T^{-1} es continua por el Teorema de la función abierta. Si $g_1, g_2 \in Y^*$ con $g_1 \neq g_2$, se puede ver que $T^*(g_1) \neq T^*(g_2)$, por lo que T^* es inyectiva. También, si $f \in X^*$, $f \circ T^{-1} \in Y^*$ y $T^*(f \circ T^{-1}) = f$, por lo que es sobre, luego biyectiva. Así, $(T^*)^{-1}$ existe y se cumple que

$$\begin{aligned}(\forall y \in Y)(\forall f \in X^*) \qquad & \langle y, (T^{-1})^*(f)\rangle = \langle T^{-1}(y), f\rangle \\ & = \langle T^{-1}(y), T^*(T^*)^{-1} f\rangle \\ & = \langle TT^{-1}y, (T^*)^{-1} f\rangle = \langle y, (T^*)^{-1} f\rangle\end{aligned}$$

$\therefore (T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$ □

Lema 4.1.7. *Se tiene: i) $N(T) = R(T^*)^\perp$ y ii) $N(T^*) = R(T)^\perp$.*

Demostración. i) $x \in N(T) \Leftrightarrow (\forall g \in Y^*) g(T(x)) = 0 \Leftrightarrow x \in R(T^*)^\perp$.
ii) $g \in N(T^*) \Leftrightarrow (\forall x \in X) T^*(g)(x) \Leftrightarrow (\forall x \in X) g(T(x)) = 0 \Leftrightarrow g \in R(T)^\perp$.
□

Corolario 4.1.8. ***(Teorema del rango cerrado)***
$R(T)$ es cerrado si y solo si $N(T^*)^\perp = R(T)$.

Teorema 4.1.9. *El operador T^* es inyectivo si y solo si $R(T)$ es denso.*

Demostración. T^* es inyectiva $\Leftrightarrow N(T^*) = 0 \Leftrightarrow R(T)^\perp = \{0\} \Leftrightarrow \overline{R(T)} = Y$. □

Ahora regresamos al contexto de espacios con producto interno. Sea X un espacio con producto interno. Recordemos que un operador T en X es simétrico si $(\forall x, y \in D(T))$ se tiene que $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle$.

Anteriormente vimos que en espacios de Hilbert un operador lineal y simétrico tiene que ser forzosamente acotado, y por lo tanto auto-adjunto (Teorema 2.2.13), a continuación mostramos otras propiedades importantes.

Proposición 4.1.10. *Un operador simétrico en un espacio de Hilbert con rango denso es de hecho inyectivo.*

Demostración. Surge del Teorema del rango cerrado. □

Teorema 4.1.11. *Sea T un operado acotado y simétrico en un espacio de con producto interno, entonces*

$$\|T\| = \sup\left\{|\langle x, T(x)\rangle| : x \in D(T), \|x\| = 1\right\}.$$

Demostración. Sea $M := \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|$. Como

$$\|T\| = \sup_{\|z\|=1} \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, z\rangle|,$$

está claro que $\|T\| \geq M$. Mostremos pues la otra desigualdad.

Se puede verificar que

$$\langle T(x+z), x+z\rangle - \langle T(x-z), x-z\rangle = 4Re\langle Tx, z\rangle.$$

Usando la ley del paralelogramo tenemos entonces

$$4Re\langle Tx, z\rangle \leq M\|x+z\|^2 + M\|x-z\|^2 = 2M(\|x\|^2 + \|z\|^2),$$

lo cual es válido también para $z = x$.

Ahora bien, si $z := Tx/\|Tx\|$, entonces

$$Re\langle Tx, z\rangle = Re\left\langle Tx, \frac{Tx}{\|Tx\|}\right\rangle = \|Tx\|,$$

pero también si $\|x\| = \|z\| = 1$,

$$Re\langle Tx, z\rangle \leq \frac{M}{2}(\|x\|^2 + \|z\|^2) = M.$$

Con esto concluimos que $\|T\| \leq M$. Queda pues mostrado que $\|T\| = M$.

□

4.2. Operadores compactos

Sean X, Y ELNs de dimensión infinita, y sean $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{L}^*(X, Y)$ de rango finito. Supongamos que $T_n \to T$ y que $dim\ R(T_n) \to \infty$ cuando $n \to \infty$, para algún operador T. Una pregunta natural es ver que propiedades hereda T del hecho de que $dim\ R(T_n) < \infty$ para cada n. El concepto de operador compacto surge de esta consideración.

Definición 4.2.1. Un operador en un ELN es **compacto** si envía todo conjunto acotado a uno relativamente compacto (i.e. que la cerradura es compacta).

El siguiente resultado nos muestra una alternativa para definir un operador compacto.

Proposición 4.2.2. *Sean X y Y ELNs, y $T \in \mathcal{L}^{\#}(X,Y)$. Entonces, T es compacto si y solo si para toda sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ tal que $(\forall n)\|x_n\| < M < \infty$, se tiene que $\{T(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente en Y.*

Proposición 4.2.3. *Sean X y Y ELNs, y $T : X \to Y$ lineal y compacto, entonces T es acotado.*

Demostración. Si no fuera acotado, existiría $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ con $\|x_n\| = 1$ para toda n, tal que $\|T(x_n)\| \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Esto implicaría que $\{T(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ no puede tener subsecuencia convergente. Observemos esto: si fuera el caso, suponiendo que hay subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ con $T(x_{n_k}) \to y$ cuando $k \to \infty$ resultaría que $\|T(x_{n_k})\| \to \|y\| < \infty$ cuando $k \to \infty$. $\square$

Note que puede existir operadores no-acotados de rango finito, los cuales, de acuerdo a la Proposición 4.2.3 no pueden ser compactos. Sin embargo

Proposición 4.2.4. *En un ELN X todo operador lineal acotado de rango finito es compacto.*

Demostración. Si $A \subset X$ es acotado, $T(A)$ es acotado en $R(T)$, luego por el Teorema de Heine-Borel[1] es relativamente compacto. $\square$

Teorema 4.2.5. *Sea $X := (C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$. Si $k \in C([a,b]\times[a,b])$, entonces el operador*

$$(Tx)(t) := \int_a^b k(s,t)x(s)ds, \;\; x \in X,$$

es compacto.

Demostración. Sea $A \subset X$ acotado, i.e. $(\exists M < \infty)(\forall x \in A)\|x\|_\infty < M$. Así

$$(\forall x \in A)(\forall t \in [a,b])|(Tx)(t)| \le M(b-a) \max_{s,t\in[a,b]} k(s,t),$$

por lo tanto $T(A)$ es acotado.

También, como k es uniformemente continuo en $[a,b]\times[a,b]$,

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall s \in [a,b])|k(s,t_1) - k(s,t_2)| < \frac{\epsilon}{(b-a)M},$$

[1]Un conjunto en un ELN de dimensión finita es compacto si y solo si es cerrado y acotado.

siempre y cuando $|t_1 - t_2| < \delta$ con $t_1, t_2 \in [a, b]$.

Entonces,

$$|(Tx)t_1 - (Tx)t_2| = |\int_a^b (k(s,t_1) - k(s,t_2))x(s)ds| < \epsilon$$

para toda $x \in A$ y todos $t_1, t_2 \in [a, b]$ con $|t_1 - t_2| < \delta$. Es decir, $T(A)$ es equicontinuo (de hecho uniformemente equicontinuo), y por el Teorema de Arzelá-Ascoli $T(A)$ es relativamente compacto. Concluimos que T es compacto.

□

Los siguientes resultados ayudan en particular a ver que el conjunto de operadores compactos forman un espacio de Banach.

Proposición 4.2.6. *Sean T_1 y T_2 dos operadores en ELNs.*
i) Si T_1 y T_2 son compactos, también $\alpha T_1 + T_2$ para todo escalar α.
ii) Si $R(T_2) = D(T_1)$, y además uno es compacto y el otro acotado, entonces $T_1 \circ T_2$ también es compacto.

Teorema 4.2.7. *Sea X ELN y Y espacio de Banach. Sea $\{T_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}^*(X, Y)$ compactos tal que $T_k \to T$ cuando $k \to \infty$. Entonces, $T \in \mathcal{L}^*(X, Y)$ es compacto.*

Demostración. Sea $\{x_n\} \subset X$ acotado por $M < \infty$. Por ser T_1 compacto, hay $I_1 \subseteq \mathbb{N}$ infinito tal que $\{T_1(x_n)\}_{n \in I_1}$ converge en Y. Otra vez, como T_2 es compacto, hay $I_2 \subseteq I_1$ infinito tal que $\{T_2(x_n)\}_{n \in I_2}$ converge en Y. Así sucesivamente, por inducción construimos $I_k,\ k = 1, 2 \ldots$ con $I_{k+1} \subset I_k$ y tal que $\{T_k(x_n)\}_{n \in I_k}$ converge en Y. Definase n_k el $k-$ésimo elemento de I_k; obervemos que $n_{k+1} > n_k$. Así pues, definimos $z_k = x_{n_k}$ para $k = 1, 2, \ldots$. Luego, para cualquier k

$$\begin{aligned} \|T(z_i) - T(z_j)\| &\leq \|T(z_i) - T_k(z_i)\| + \|T_k(z_i) - T_k(z_j)\| + \|T_k(z_j) - T(z_j)\| \\ &\leq 2M\|T - T_k\| + \|T_k(z_i) - T_k(z_j)\|. \end{aligned}$$

Así, para $\epsilon > 0$, existe N_1 tal que $\|T - T_k\| < \frac{\epsilon}{4M}$ cuando $k \geq N_1$. Notemos además que si $i, j \geq N_1$, entonces $n_i, n_j \in I_{N_1}$. Como $\{T_{N_1}(x_n)\}_{n \in I_{N_1}}$ converge, podemos tomar $N_2 > N_1$ tal que

$$\|T_{N_1}(z_i) - T_{N_1}(z_j)\| < \epsilon/2 \text{ para } i, j \geq N_2$$

$$\therefore \|T(z_i) - T(z_j)\| < \epsilon \text{ para } i, j \geq N_2.$$

Lo anterior nos dice que $\{T(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, y por ser Y completo, converge. Estamos pues diciendo que $\{T(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsuseción convergente, por lo tanto T es compacto. $\square$

Para el siguiente resultado usaremos lo siguiente:
i) Consideramos $(G, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio con medida y $L^2(G)$ el espacio de Hilbert con producto interno $\langle f, g\rangle := \int_G f(s)\overline{g(s)}\mu(ds)$ y con una base numerable de funciones real valuadas.
ii) El espacio $l_2 := \{(a_n)_{n=1}^{\infty} : a_n \in \mathbb{K},\ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}$ es de Hilbert con el producto interno $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}$. Notemos que $l_2 = L^2(G)$ con $G = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(G)$ y μ la medida del conteo. En particular la desigualdad de Cauchy-Schwarz establece que

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}\right|^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2\right).$$

Teorema 4.2.8. *Sea $(G, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio con medida. En $L^2(G)$ consideramos el operador*

$$(Tx)(t) := \int_G k(s,t)x(s)\mu(ds),\ \ x \in L^2(G).$$

Si k está en el espacio $L^2(G \times G)$, entonces $T : L^2(G) \to L^2(G)$ es compacto.

Demostración. Sea $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ base ortonormal de $L^2(G)$ y definamos $a_{mn} := \langle Te_m, e_n\rangle$. Para toda $x \in L^2(G)$ $x = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n$ y como $Tx \in L^2(G)$,

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\langle Tx, e_n\rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty}\langle\sum_{m=1}^{\infty}\langle x, e_m\rangle Te_m, e_n\rangle e_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\langle x, e_m\rangle\langle Te_m, e_n\rangle e_n. \end{aligned}$$

Así los operadores

$$T_k(x) := \sum_{n=1}^{k}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}\langle x, e_m\rangle e_n$$

son de rango finito y acotados, luego compactos. Por otro lado,

$$Tx - T_k x = \sum_{n=k+1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}\langle x, e_m\rangle e_n.$$

Por la identidad de Parseval en $L^2(G)$ y la desigualdad de Cauchy-Schwarz en l_2 se tiene que

$$\begin{aligned}\|Tx - T_k x\|^2 &= \sum_{n=k+1}^{\infty}\left|\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}\langle x, e_m\rangle\right|^2\\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty}|\langle x, e_m\rangle|^2 \sum_{n=k+1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}|a_{mn}|^2\right)\\ &= \|x\|^2\sum_{n=k+1}^{\infty} b_n,\end{aligned}$$

donde $b_n := \sum_{m=1}^{\infty}|a_{mn}|^2,\ n = 1, 2, \ldots$. Defina $k_t(s) := k(s,t)$, entonces usando el Teorema de Fubini tenemos que

$$\begin{aligned}\|k\|^2 &= \int\int |k(s,t)|^2\mu(ds)\mu(dt) = \int \|k_t\|^2\mu(dt) = \int \sum_{m=1}^{\infty}|\langle k_t, e_m\rangle|^2\mu(dt)\\ &= \int\sum_{m=1}^{\infty}\left|\int_G k_t(r)e_m(r)\mu(dr)\right|^2\mu(dt) = \int\sum_{m=1}^{\infty}|[Te_m](t)|^2\mu(dt)\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\int |T(e_m)(t)|^2\mu(dt) = \sum_{m=1}^{\infty}\|Te_m\|^2\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|\langle Te_m, e_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|a_{mn}|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n,\end{aligned}$$

por lo que $\sum_{n=k+1}^{\infty} b_n \to 0$ cuando $k \to \infty$. Por lo tanto

$$\|T - T_k\| \to 0,\ k \to \infty,$$

y por el teorema anterior T es compacto. □

Estudiemos ahora el adjunto.

Teorema 4.2.9. ***(Teorema de Schauder)*** *Sean X y Y espacios de Banach, y T lineal. Entonces, T es compacto si y solo si T^* es compacto.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y^*$ arbitraria con $\|g_n\| < M < \infty$ para toda n. Usando el Teorema de Alaoglu (tomando un punto límite del conjunto compacto), existe $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $f \in Y^*$ tal que $f_n \xrightarrow{w^*}$

f cuando $n \to \infty$. Sea $K := \overline{T\left(\overline{B_1(0)}\right)}$, el cual es compacto por ser T compacto. Probemos ahora que el conjunto $\{f_n |_K\}$ de funciones en $(C(K), \|\bullet\|_\infty)$ (con la norma dado por el supremo sobre K, i.e. $\|f\|_\infty = \sup_{y\in K} |f(y)|$) es equicontinuo y acotado. Para ver que es acotado, notemos que

$$(\forall n)(\forall x \in B_1(0))|f_n(T(x))| \leq M\|T\|,$$

por lo que también

$$(\forall n)(\forall y \in K)|f_n(y)| \leq M\|T\|.$$

Para ver que es equicontinuo, fijemos $0 < \alpha \leq M$ tal que $(\forall n) \sup \|f_n\| \leq \alpha$. Ahora, sean $y' \in K$ y $\epsilon > 0$ arbitrarios. Así, tenemos que para toda n

$$\left(\forall y \in K \bigcap B_{\epsilon/\alpha}(y')\right) |f_n(y') - f_n(y)| \leq \|f_n\|\|y' - y\| < \epsilon.$$

Notemos que $K \bigcap B_{\epsilon/\alpha}(y')$, que depende de ϵ y y', funge como un conjunto abierto en la topología relativa de K.

Por el Teorema de Arzela-Ascoli, $\{f_n |_K\}$ es un conjunto relativamente compacto en $(C(K), \|\bullet\|_\infty)$, entonces existe $\{h_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \{f_n\}_{n=1}^\infty$ convergente, y cuyo límite tiene que ser f (el mismo que en la convergencia w^*). Por lo tanto

$$\begin{aligned}(\forall \epsilon > 0)(\exists N) \qquad & \|T^*(h_n) - T^*(f))\| \\ & = \sup_{x\in\overline{B_1(0)}} |(h_n \circ T)(x) - (f \circ T)(x)| \\ & \leq \sup_{y\in K} |h_n(y) - f(y)| \\ & = \|h_n - f\|_\infty < \epsilon \text{ para } n > N.\end{aligned}$$

$\therefore$ T^* es compacto.

($\Leftarrow$) Sea $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ acotada, y defina $\{eval_{x_n}\}_{n=1}^\infty \subset X^{**}$; como $\|eval_{x_n}\| = \|x_n\|$ para cada n, la sucesión $\{eval_{x_n}\}_{n=1}^\infty$ es también acotada. Por la primer parte del teorema, T^{**} es compacto, entonces $\{T^{**}(eval_{x_n})\}_{n=1}^\infty$ tiene subsucesión convergente $\{T^{**}(eval_{x_{n_k}})\}_{k=1}^\infty$, en particular esta sucesión es de Cauchy. Recordando la demostración del Teorema 4.1.3, $\|T^{**}(eval_x)\| = \|T(x)\|$ para toda $x \in X$, entonces $\{T(x_{n_k})\}_{k=1}^\infty \subset Y$ es también de Cauchy, la cual es convergente porque Y es completo, por lo tanto T es compacto. $\square$

Ahora tenemos resultados sobre un operador de la forma $T - \lambda I$, lo cual permitirá analizar el espectro de T. Como $\frac{1}{\lambda}T$ también es compacto cuando $\lambda \neq 0$, sin perdida de generalidad podemos trabajar con $T - I$.

Proposición 4.2.10. *Sea X espacio de Banach, $T : X \to X$ lineal y compacto. Entonces $dim(N(T - I)) < \infty$.*

Demostración. Como $T-I$ es operador acotado, $Z := N(T-I)$ es subespacio cerrado, luego es espacio de Banach. Resulta entonces que $T : Z \to X$ es también compacto. Veamos que $R(T) = Z$ y de hecho $T : Z \to Z$ es la identidad. En efecto, si $\omega \in Z$, $(T - I)\omega = 0$, o sea que $T(\omega) = \omega$. Por compacidad de T, si tomamos $\overline{B_1(0)} \subset Z$, entonces $\overline{T\left(B_1(0)\right)}$ es compacto, pero este conjunto coincide con $\overline{B_1(0)}$, y para que este sea compacto se necesita que $dimZ < \infty$. $\square$

Proposición 4.2.11. *Sea X de Banach de dimensión infinita. Si $T \in \mathcal{L}^*(X)$ es compacto, T no es invertible, por lo que $0 \in \sigma(T)$.*

Demostración. Primero notemos que T es operador cerrado por ser continuo. Si T fuera invertible entonces sería sobreyectivo, y por el Teorema de la función abierta, T sería abierto. Entonces $T(B_1(0)) \subset X$ es conjunto abierto que contine a 0, por lo que existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(0) \subset T(B_1(0))$. Pero por compacidad de T, $\overline{T(B_1(0))}$ sería compacto, por lo que $\overline{B_\epsilon(0)}$ sería también compacto. Pero esto solo ocurriría si X es de dimensión finita, lo cual no es posible. $\square$

El siguiente resultado será de ayuda en la siguiente sección.

Proposición 4.2.12. *Sea X de Banach y $T \in \mathcal{L}^*(X)$ compacto. Entonces, para $\lambda \neq 0$, $R(T - \lambda I)$ es cerrado.*

Demostración. Sabemos que $dim(N(T - \lambda I)) < \infty$. Así, hay espacio lineal Z cerrado tal que $X = N(T - \lambda I) \oplus Z$, y notemos que $R(T - \lambda I) = (T - \lambda I)Z$. Afirmamos que

$$(\exists \epsilon > 0)\|(T - \lambda I)z\| \geq \epsilon\|z\| \text{ para todo } z \in Z. \tag{4.1}$$

Si fuera falso, hay $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Z$ con $\|z_n\| = 1$ y tal que $(T-\lambda I)z_n \to 0$. Como T es compacto, existe $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $x \in X$ tal que $T(z_{n_k}) \to x, k \to \infty$. También por la continuidad de $T-\lambda I$, $x = \lim_{k\to\infty} T(z_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} \lambda z_{n_k}$

$\therefore \|x\| > 0$, porque cada z_{n_k} tiene norma 1. Además, $x \in Z$ por ser Z cerrado, y también

$$(T - \lambda I)x = \lambda \lim_{k\to\infty} (T - \lambda I) z_{n_k} = 0.$$

Así, $x \in N(T - \lambda I)$, sin embargo $N(T - \lambda I) \bigcap Z = \{0\}$, por lo que $x = 0$, lo cual es una contradicción. Entonces la afirmación (4.1) se cumple.

Con esto, tomemos $\{x_n\}_n^\infty \subset R(T - \lambda I)$ sucesión de Cauchy. Ahora tomemos $z_n \in Z$ tal que $(T - \lambda I)z_n = x_n$. Por la propiedad (4.1), $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ también es de Cauchy, por lo que existe $z \in Z$ con $z_n \to z,\ n \to \infty$. Como $T - \lambda I$ es continua,

$$(T - \lambda I)z = \lim_{n\to\infty} (T - \lambda I)z_n = \lim_{n\to\infty} x_n,$$

por lo tanto $R(T - \lambda I)$ es cerrado. □

Sabemos que el límite de operadores compactos es compacto, y que los operadores lineales acotados de rango finito son compactos. Concluimos esta sección observando que, bajo ciertas condiciones, un operador compacto es el límite de operadores de rango finito.

Recordemos que $\{a_k\}$ es una base de Schauder para un espacio lineal Y cuando para todo $y \in Y$ existen únicos escalares $\lambda_k(y)$ tales que $y = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k(y)a_k$. Se puede verificar que $\lambda_k \colon Y \to \mathbb{K}$ son funcionales lineales acotadas.

Lema 4.2.13. *Sean X y Y ELNs. Sea $\{T_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{L}^*(X, Y)$ acotado y $K \subset X$ subconjunto compacto. Si $(\forall x \in K) \lim_{n\to\infty} T_n(x) = 0$, entonces la convergencia es uniforme, i.e.*

$$\sup_{x\in K} \|T_n(x)\| \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

Demostración. Supongamos que no es uniforme, entonces existe $\epsilon > 0$ y una secuencia de números enteros n_i y vectores x_{n_i} $(i = 1, 2, \ldots)$ tales que $\|T_{n_i}(x_{n_i})\| \geq \epsilon$ para $i = 1, 2, \ldots$. Como K es compacto, podemos considerar $\{x_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ convergente a un punto $x \in K$. Sin embargo, para cada i tenemos que

$$\|T_{n_i}(x)\| \geq \|T_{n_i}(x_{n_i})\| - \|T_{n_i}(x) - T_{n_i}(x_{n_i})\| \geq \epsilon - \|T_{n_i}\|\|x - x_{n_i}\|.$$

$\therefore \lim_{i\to\infty} \|T_{n_i}(x)\| \geq \epsilon$, lo cual contradice la hípotesis. □

Teorema 4.2.14. *(**Teorema de Schauder**) Sean X y Y espacios de Banach. Si Y tiene una base de Shauder, entonces todo operador compacto en $\mathcal{L}^*(X,Y)$ es el límite de operadores con rango finito.*

Demostración. Sea $T \in \mathcal{L}^*(X,Y)$ compacto y sea $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ una bases de Shauder de Y, i.e. $(\forall y \in Y)(\exists$ únicos escalares $\lambda_k(y))$ $y = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(y)a_k$, y tales mapeos $\lambda_k(\bullet)$, $k = 1, 2, \ldots$ son funcionales lineales acotadas. Defina $P_n : Y \to Y$ como

$$P_n(y) := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(y)a_n.$$

Notemos que $I - P_n$ es lineal y se cumple $\lim_{n\to\infty}(I - P_n)(y) = 0$ para cada $y \in K$, donde $K := \overline{T(B_1(0))}$. Como K es compacto y $\|P_n \circ T\| \leq \|T\|$, por el lema anterior la convergencia es uniformemente en K. Por lo tanto

$$\sup_{x\in B_1(0)} \|(I - P_n) \circ T(x)\| \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

Esto nos dice que $\|T\| = \lim_{n\to\infty} \|P_n \circ T\|$, y obervamos que $\{P_n \circ T\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de operadores lineales de rango finito. $\square$

4.3. La alternativa de Fredholm

Definición 4.3.1. Sea X un ELN sobre $\mathbb{C}$ y $T \in \mathcal{L}^{\#}(X)$. Se dice que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un **eigenvalor** de T si $N(T-\lambda I) \neq \{0\}$, con **multiplicidad** $n = dimN(T-\lambda I)$. Y el conjunto $N(T - \lambda I)$ son los **eigenvectores** correspondientes a λ.

Teorema 4.3.2. *Sea X de Banach, $T \in \mathcal{L}^*(X)$ compacto. Entonces, para $\lambda \neq 0$, λ es eigenvalor si y solo si $T - \lambda I$ no es sobreyectiva.*

Demostración. $(\Rightarrow)$ Sea λ eigenvalor de T, y supongamos que $R(T - \lambda I) = X$. Definase $X_k = N((T - \lambda I)^k)$, que es cerrado y cumple con $X_{k-1} \subset X_k, k \geq 1$. Sea $x_1 \in X_1 - \{0\}$, y usando la sobreyectividad definamos inductivamente x_k tal que $(T - \lambda I)x_k = x_{k-1}$, $k \geq 2$. Vemos que $x_k \in X_k$ pues

$$(T - \lambda I)^k x_k = (T - \lambda I)^{k-1} x_{k-1} = \ldots = (T - \lambda I)x_1 = 0,$$

sin embargo, por el mismo argumento $x_k \notin X_{k-1}$ puesto que $(T-\lambda I)^{k-1}x_k = x_1 \neq 0$.

Por Lema de Riesz hay $y_k \in X_k$ con $\|y_k\| = 1$ tal que $dist(y_k, X_{k-1}) > 1/2$. Así, para $k < j$, veamos que

$$\|T(y_j) - T(y_k)\| = \|\lambda y_j + (T - \lambda I)y_j - T(y_k)\| > \frac{\lambda}{2}.$$

Primero se tiene que $\lambda y_j \in X_j$, y por otro lado $(T - \lambda I)(y_j) - T(y_k) \in X_{j-1}$. En efecto, $(T - \lambda I)^{j-1}(T - \lambda I)y_j = 0$, y adicionalmente $(T - \lambda I)^k y_k = 0$, entonces $(T-\lambda I)^{k-1}T(y_k) = \lambda(T-\lambda I)^{k-1}y_k$. Dado que $k-1 < j-1$, tenemos pues que $(T - \lambda I)^{j-1}T(y_k) = 0$.

Esto nos dice que $\{T(y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ no tiene subsucesión convergente, contradiciendo que T es compacto, por lo tanto $R(T - \lambda I) \neq X$.

($\Leftarrow$) Supongamos que λ no es eigenvalor, entonces $N(T-\lambda I) = \{0\}$. Así, $R((T - \lambda I)^*)^{\perp} = \{0\}$ (por el Lema 4.1.7), o sea que $R((T - \lambda I)^*)^{\perp\perp} = X^*$. Sabemos también por el Teorema de Shauder que T^* es compacto, entonces $R((T - \lambda I)^*) = R((T^* - \lambda I)$ es cerrado por la Proposición 4.2.12, por lo que $R((T - \lambda I)^*) = X^*$ (recuerde el Teorema 1.3.21). Luego, aplicando la primera parte de este teorema, vemos que λ no es eigenvalor de T^*. Entonces, $N(T^* - \lambda I) = \{0\}$, o sea $R(T - \lambda I)^{\perp} = \{0\}$, o también $R(T - \lambda I)^{\perp\perp} = X$. Nuevamente, como T es compacto, $R(T - \lambda I)$ es cerrado; por lo que $R(T - \lambda I) = X$, contradiciendo que $T - \lambda I$ no es sobreyectiva. Por lo tanto λ es eigenvalor de T. $\square$

El teorema anterior también dice, $T - \lambda I$ no es inyectiva $\Leftrightarrow$ $T - \lambda I$ no es sobre sobreyectiva, o también, es inyectiva $\Leftrightarrow$ sobreyectiva.

Definición 4.3.3. Sea X ELN. El espectro de un operador $T \in \mathcal{L}^*(X)$ es el conjunto $\sigma(T) \subset \mathbb{C}$ tal que $(\forall \lambda \in \sigma(T))$ $T - \lambda I$ no tiene inversa acotada en todo X.

Asi, λ está en el espectro si
i) λ eigenvalor de T,
ii) $R(T - \lambda I) \neq X$ ó
iii) $T - \lambda I$ es inyectiva pero $(T - \lambda I)^{-1}$ no es acotada.

Teorema 4.3.4. *Sea X espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}^*(X)$ compacto. Entonces,*
i) todo elemento de $\sigma(T) - \{0\}$ es eigenvalor, y
ii) $\sigma(T)$ no se acumula en ninguna parte de $\mathbb{C} - \{0\}$.

Demostración. i) sea $\lambda \in \sigma(T) - \{0\}$. Supongase que λ no es eigenvalor de T. Entonces, $N(T - \lambda I) = \{0\}$; por el teorema anterior $T - \lambda I$ es sobreyectiva, por lo tanto invertible. Por el Teorema de la función abierta, $(T-\lambda I)^{-1}$ es acotada, luego $\lambda \notin \sigma(T)$, lo cual es una contradicción, por lo tanto λ es eigenvalor de T.

ii) Supongamos que $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \sigma(T)$ distintos y tales que $|\lambda_j| > \epsilon > 0$. Usando i), tomemos $x_j \in N(T-\lambda_j I) - \{0\}$, luego, los x_j's son linealmente independientes. Se puede usar el siguiente tipo de argumento.

$$ax_1 + bx_2 = 0 \Rightarrow T(ax_1 + bx_2) = a\lambda_1 x_1 + b\lambda_2 x_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2.$$

Sea pues $X_n := \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. Por el Lema de Riesz, existe $y_n \in X_n$ con $\|y_n\| = 1$ y tal que $dist(y_n, X_{n-1}) > 1/2$. Observemos que

$$T(y_n)-\lambda_n y_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T(x_j) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_n \alpha_j x_j = \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - \lambda_n)\alpha_j x_j = \sum_{j=1}^{n-1} (\lambda_j - \lambda_n)\alpha_j x_j,$$

lo cual está en X_{n-1}. Así, si $m < n$ se tiene que

$$\|T(y_n) - T(y_m)\| = \|\lambda_n y_n - (\lambda_n y_n - T(y_n)) + T(y_m)\| > \frac{|\lambda_n|}{2} > \frac{\epsilon}{2},$$

pues $-(\lambda_n y_n - T(y_n)) + T(y_m) \in X_{n-1}$. Pero esto contradice la compacidad de T, por lo tanto, a lo más un número finito de los $\{|\lambda_j|\}_{j=1}^{\infty}$ son mayores a ϵ. □

De lo anterior, ocurre que $\lambda \in \sigma(T)$ ó $\lambda \notin \sigma(T)$, por lo tanto tenemos el

Teorema 4.3.5. ***(de la alternativa de Fredholm)*** *Sea X espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(X)$ compacto. Si $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ entonces una de las siguientes es cierta:*
i) Para todo $y \in X$, existe un único $x \in X$ tal que $T(x) - \lambda x = y$.
ii) Existe $x \in X - \{0\}$ tal que $T(x) - \lambda x = 0$.

4.4. Un teorema espectral

El lo sucesivo X es espacio con producto interno.

Algunas propiedades de eigenvalores de operadores simétricos son las siguientes; su demostracion queda como ejercicio.

Lema 4.4.1. *Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ simétrico, entonces*
i) Todos los eigenvalores de T son reales.
ii) Eigenvectores de diferentes eigenvalores son ortogonales.
iii) $\langle T(x), x \rangle$ es real para dodo $x \in X$.

Teorema 4.4.2. *Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ compacto y simétrico. Entonces al menos uno de los 2 valores $\{\|T\|, -\|T\|\}$ es eigenvalor de T.*

Demostración. Asumamos que $T \neq 0$. Sabemos del Teorema 4.1.11 que

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle T(x), x\rangle|.$$

Tomemos $\{x_n\} \subset X$ con $\|x_n\| = 1$ tal que $\lim_{n\to\infty} |\langle T(x_n), x_n\rangle| = \|T\|$. Como T es compacto, existe $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $T(x_k) \to y \neq 0$ cuando $k \to \infty$. Del lema anterior $\langle Tx, x\rangle$ es real para todo $x \in X$, por lo que podemos tomar dicha sucesión tal que $\lambda := \langle T(x_k), x_k\rangle \to \|T\|$ ó $-\|T\|$.

Así, cuando $k \to \infty$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|Tx_k - \lambda x_k\|^2 = \langle Tx_k - \lambda x_k, Tx_k - \lambda x_k\rangle \\ &= \langle Tx_k, Tx_k\rangle - 2\lambda\langle Tx_k, x_k\rangle + \lambda^2 \\ &\to \|y\|^2 - 2\lambda^2 + \lambda^2 = \|y\|^2 - \lambda^2. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\|y\| = \lim_{k\to\infty} \|Tx_k\| \leq \|T\| = |\lambda|.$$

Entonces $\lim_{k\to\infty} \|Tx_k - \lambda x_k\| = 0$, luego

$$\|y - \lambda x_k\| \leq \|y - Tx_k\| + \|Tx_k - \lambda x_k\| \to 0,$$

cuando $k \to \infty$. O sea que $\lim_{k\to\infty} \lambda x_k = y$, por lo tanto

$$T(y) = \lim_{k\to\infty} T(\lambda x_k) = \lim_{k\to\infty} = \lambda y.$$

Como $y \neq 0$, podemos concluir que al menos uno de $\{\|T\|, -\|T\|\}$ es eigenvalor. $\square$

Teorema 4.4.3. *(**Teorema de descomposición espectral**) Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ compacto y simétrico. Entonces, existen un conjunto $\{\lambda_k\} \subseteq \mathbb{R}$ a lo más numerable de eigenvalores de T repetidos de acuerdo a multiplicidades y tal que*

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, e_k\rangle e_k$$

para todo $x \in X$, donde $\{e_k\}$ forma un conjunto ortonormal. Además, si la colección de eigenvalores es infinito entonces $\lambda_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Demostración. Suponemos que $T \neq 0$, de lo contrario es trivial. Sea $X_1 = X$. Del teorema anterior tomemos $\lambda_1 = \pm\|T\|$ y un eigenvector $e_1 \in X_1$ para λ_1 con $\|e_1\| = 1$. Ahora sea $X_2 = \{e_1\}^\perp \subseteq X_1$. Para $x \in X_2$, se tiene $\langle T(x), e_1\rangle = \langle x, T(e_1)\rangle = \langle x, \lambda_1 e_1\rangle = 0$. Entonces $T(X_2) \subseteq X_2$.

Consideremos la restricción $T|_{X_2} \colon X_2 \to X_2$. Asi, T es compacto y simétrico, X_2 es un espacio lineal con producto interno, y $\| T|_{X_2} \| \leq \|T\|$. Si $T|_{X_2} \neq 0$, otra vez usando el teorema anterior, hay $e_2 \in X_2$ y λ_2 tales que

$$T(e_2) = \lambda_2 e_2,\ \|e_2\| = 1,\ |\lambda_2| = \| T|_{X_2} \| \leq |\lambda_1| \text{ y } e_2 \perp e_1.$$

Continuando con este proceso, formamos $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n| \geq 0$ y $\{e_1, \ldots e_n\}$ ortonormal con $T(e_k) = \lambda_k e_k$ para $k = 1, \ldots, n$. Se define $X_{n+1} = \{e_1, \ldots e_n\}^\perp$.

Puede suceder que $T|_{X_{n+1}} = 0$. En este caso, el rango de T es $R(T) = \langle\{e_1, \ldots, e_n\}\rangle$. En efecto, sea $x \in X$. Entonces

$$x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k \perp \{e_1, \ldots, e_n\},$$

por lo que $x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k \in X_{n+1}$, y se tendría pues que

$$T(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle T(e_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, e_k\rangle e_k.$$

Puede suceder que el proceso siga sin parar, pero por el Teorema 4.3.4 forzosamente $\lambda_k \to 0$ cuando $k \to \infty$.

Sea $x \in X$. Definamos $y_n = x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k$. Como $\langle y_n, e_k\rangle = 0,\ k = 1, \ldots, n$, se tiene $y_n \in X_{n+1}$ y

$$\|x\|^2 = \|y_n + \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k\|^2 = \|y_n\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 \geq \|y_n\|^2.$$

Por esto y por el hecho que $\lambda_{n+1} = \pm\| T|_{X_{n+1}} \|$,

$$\|T(y_n)\| = \|T|_{X_{n+1}}(y_n)\| \leq |\lambda_{n+1}|\|x\| \to 0,\ n \to \infty.$$

Finalmente, como $T(y_n) = T(x) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, e_k\rangle e_k$ se concluye que

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, e_k\rangle e_k.$$

$\square$

Ejemplo 4.4.4. Consideremos el espacio de funciones $L_2[0,1]$ real valuadas y $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base ortonormal de este. Podemos intentar verificar que el siguiente operador es compacto y simétrico,

$$[Tf](t) := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n(t) \int_0^1 f(s) e_n(s) ds, \ t \in [0,1], \tag{4.2}$$

para todo $f \in L_2[0,1]$, y donde $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$.

Si así resulta, se puede ver que el conjunto $\{(e_n, \alpha_n)\}_{n=1}^{\infty}$ corresponden a los eigenvectores y eigenvalores de T. ¿Qué condiciones necesitamos pedir al conjunto de α's para que esto sea así?

Apéndice A

Herramientas Generales

A.1. Espacios topológicos

Definición A.1.1. Un **espacio métrico** es el par (X, d) donde X es no vacio y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ cumple para todos $x, y, z \in X$
i) $d(x, y) \leq 0$,
ii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$,
iii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Definición A.1.2. Una **topología** es un conjunto X es una colección τ de subconjuntos de X tal que
i) $\emptyset, X \in \tau$
ii) toda unión arbitraria de elementos de τ está en τ,
iii) toda intersección finita de elementos de τ está en τ.
A un elemento de τ se le llama **abierto**. Si A es abierto, A^c se le llama **cerrado**.

En un espacio métrico definimos la bola cerrada con centro en a y radio r como $B_r[a] := \{x \in X : d(a, x) \leq r\}$, y la bola abierta $B_r(a) := \{x \in X : d(a, x) < r\}$. El primer conjunto es cerrado, pero puede ocurrir que $B_r[a] \neq \overline{B_r(a)}$, en cuyo caso $\overline{B_r(a)} \subset B_r[a]$ estrictamente.

Definición A.1.3. Una topología τ es **metrizable** si proviene de una métrica. Es decir, si cualquier abierto es abierto usando la métrica, en símbolos: $A \in \tau$ si $(\forall x \in A)(\exists \epsilon > 0)\{y : d(x, y) < \epsilon\} \subset A$.

Definición A.1.4. Una topología es de **Hausdorff** si $(\forall x_1, x_2 \in X$ diferentes $)(\exists U_1, U_2 \in \tau)$ con $x_1 \in U_1,\ x_2 \in U_2$, y $U_1 \bigcap U_2 = \emptyset$.

Proposición A.1.5. *Si una topología es metrizable, entonces es de Hausdorff.*

Proposición A.1.6. *En cualquier topología de X,*
i) $\emptyset, X$ son también cerrados,
ii) toda unión finita de cerrados es cerrado,
iii) toda intersección arbitraria de cerrados es cerrado.

Definición A.1.7. i) La **cerradura** de un conjunto A, denotado $\overline{A}$, es la intersección de todos los cerrados que contienen a A.
ii) El **interior** de un conjunto A, denotado $int(A)$, es la unión de todos los abiertos contenidos en A.
iii) Un punto $x \in X$ es **punto límite**(**punto de acumulación**) de A, si todo abierto que contiene a x intersecta a $A - \{x\}$. Un **punto aislado** de A es aquel que está en A pero no es punto límite.

Proposición A.1.8. *Un conjunto es cerrado si y solo si contiene todos sus puntos de acumulación.*

Definición A.1.9. En un espacio topológico X. Un conjunto A de X es **denso en ningún lado** si $int(A) = \emptyset$. El conjunto es **denso** si $\overline{A} = X$. El espacio X es **separable** si tiene un subconjunto denso y separable.

Proposición A.1.10. *Se tiene:*
i) A es denso $\Leftrightarrow$ todo abierto no vacio intersecta a A $\Leftrightarrow$ A^c no contiene ningún abierto no vacio.
ii) A es nunca denso $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ no contiene ningún abierto no vacio $\Leftrightarrow$ A^c es denso $\Leftrightarrow$ todo abierto no vacio contiene un abierto no vacio contenido en A^c.

Proposición A.1.11. *Una unión finita de nunca densos es nunca denso.*

Demostración. Sean A, B nunca densos. Sea $G \neq \emptyset$ abierto. Así
$\exists G_1 \subset G$ abierto no vacio contenido en A^c, y
$\exists G_2 \subset G_1$ abierto no vacio contenido en B^c.
Luego, $G_2 \subset G$ está contenido en $(A \bigcup B)^c$ $\therefore$ $A \bigcup B$ es denso. □

Definición A.1.12. i) La **topología inducida** (**heredada** ó **relativa**) de un subconjunto $Y \subset X$ es $\tau_Y := \{G \bigcap Y : G \in \tau\}$.
ii) Una topología τ_1 es más **fina** que otra τ_2, si todo elemento de τ_2 está en τ_1.

iii) Una **base** para la topología τ es un familia β se subconjuntos de X tal que todo elemento de τ se puede contruir con la unión de elementos de β.
iv) Una **subbase** es β_0 tal que la intersección finita de elementos de β_0 forma una base, i.e. $\beta = \{\bigcap_{i=1}^{n} B_i : B_i \in \beta_0\}$.

Definición A.1.13. En un espacio métrico una sucesión $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$:
i) es de Cauchy si $(\forall\epsilon > 0)(\exists N)(\forall n, m \geq N)d(x_m, x_n) < \epsilon$;
ii) converge a x si $(\forall\epsilon > 0)(\exists N)(\forall n \geq N)d(x, x_n) < \epsilon$.

Se puede mostrar que si una sucesión converge entonces es de Cauchy. Un espacio métrico es **completo** si toda sucesión de Cauchy converge a algún elemento en X.

Definición A.1.14. El diámetro de un conjunto A en un espacio métrico se define como $diam(A) := \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$.

Teorema A.1.15. ***(de Cantor de conjuntos anidados)*** *Sea (X, d) un espacio métrico completo y $\{F_n, n = 1, 2, \ldots\}$ una sucesión decreciente de conjuntos no vacios tal que $diam(F_n) \to 0, n \to \infty$. Entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$.*

Definición A.1.16. Un conjunto es de **primera categoría** si se puede expresar como la unión contable de conjuntos nunca densos. Un conjunto es de **segunda categoría** si no es de primera categoría.

A.2. Compacidad y continuidad

Definición A.2.1. Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) espacios métricos.
i) Una función $f : X_1 \to X_2$ es **continua en** $a \in X_1$, si

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in X_1)d_1(x, a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

ii) f es **continua** si lo es todo $a \in X_1$.
iii) f es uniformemente continua en X_1 si

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x, y \in X_1)d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

iv) f es una isometría si $d_1(x, y) = d_2(f(x), f(y))$ para todo $x, y \in X_1$.

Definición A.2.2. Sean (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) espacios topológicos.
i) $f : X_1 \to X_2$ es **continua** si $(\forall G \in \tau_2)f^{-1}(G) \in \tau_1$.
ii) f es **abierta** si $(\forall G \in \tau_1)f(G) \in \tau_2$.
iii) f es un **homomeorfismo** si es biyectiva, abierta y continua.

Definición A.2.3. Sea (X, τ) un espacion topológico.
i) Un conjunto $A \subset X$ es **compacto** si toda cubierta abierta de A contiene una subcubierta finita.
ii) A es **secuencialmente compacto** si toda sucesión en A tiene una subsucesión convergente.
iii) A es **relativamente compacto** si su cerradura es compacto.

Teorema A.2.4. *Si A es compacto y f es continua, entonces $f(A)$ es compacto.*

Teorema A.2.5. *Sean X y Y espacios métricos. Sea $f : X \to Y$ continua y X compacto. Entonces f es uniformemente continua.*

Definición A.2.6. Un espacio métrico (X, d) es **totalmente acotado** si $(\forall \epsilon > 0)(\exists x_1, \ldots, x_n \in X) X = \bigcup_{i=1}^{n} B_\epsilon(x_i)$.

Teorema A.2.7. *Un espacio métrico es compacto $\Leftrightarrow$ es secuencialmente compacto $\Leftrightarrow$ es completo y totalmente acotado.*

A.3. Espacios productos

Definición A.3.1. Sea I un conjunto de índices y $\{(X_\alpha, \tau_\alpha),\ \alpha \in I\}$ espacios topológicos.
i) Definimos el espacio producto como

$$\Pi_{\alpha \in I} X_\alpha := \{(x_\alpha)_{\alpha \in I} : x_\alpha \in X_\alpha\}.$$

ii) La **proyección** $P_\beta : \Pi_{\alpha \in I} X_\alpha \to X_\beta$ con $\beta \in I$ es tal que $P_\beta(x) = x_\beta$ para toda $x \in \Pi_{\alpha \in I} X_\alpha$.
iii) La **topología producto** es la más débil (menos fina, más burda) en el espacio producto que hace continua todas las proyecciones.

Si $X_\alpha = X$ para toda $\alpha \in I$, entonces el espacio producto se puede ver como el conjunto de funciones de I a X.

Teorema A.3.2. *(**de Tychonoff**) Si los espacios X_α son compactos para toda $\alpha \in I$, entonces el espacio producto con la topología producto es compacto.*

Definición A.3.3. Sea X cualquier espacio y Y espacio topológico. Considere $\mathcal{F} \subset Y^X := \{\text{funciones de } X \text{ en } Y\}$. La **topología débil** de X con respecto a $\mathcal{F}$ es la más débil que hace continua a las funciones en $\mathcal{F}$.

A.4. Teoría de la medida

Definición A.4.1. Sea X un conjunto arbitrario.
i) El **conjunto potencia** de X es $P(X) := \{A : A \subset X\}$.
ii) Una $\sigma-$**álgebra** de conjuntos de X es una colección $\Omega \subset P(X)$ tal que $X \in \Omega$ y Ω es cerrado bajo complementos y uniones contables.
iii) Un par (X, Ω), con Ω $\sigma-$álgebra de X, se llama un **espacio medible**.
iv) Una $\sigma-$álgebra **generada** por una colección $\mathcal{F} \subset P(X)$ es la más pequeña que contiene a $\mathcal{F}$ (con menos elementos).
v) Si τ es una topología en X, la $\sigma-$álgebra de Borel es la generada por τ.

Definición A.4.2. Sea X espacio medible y Y espacio topológico. Una función $f : X \to Y$ es **medible** si $(\forall U \in \tau_Y) f^{-1}(U) \subset \Omega_X$.

Nota A.4.3. Las operaciones $f + g$, fg, $|f|$, $\sup f_n$, $\lim f_n$ conservan medibilidad.

Definición A.4.4. $f : X \to \mathbb{R}$ es **simple** si $f(X)$ es finito.

Así, $f := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ es medible si los A_i's son medibles (χ_A es la función indicadora de A). De hecho una función simple siempre se puede expresar de esta forma con los A_i's ajenos.

Definición A.4.5. i) Una función $\mu : \Omega \to [0, \infty]$ es una **medida** si $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ para $A_1, A_2, \ldots$ ajenos.
ii) Un **espacio con medida** es (X, Ω, μ); y es $\sigma-$finito si se puede escribir $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_n$ con $\mu(X_n) < \infty$.

Definición A.4.6. i) La integral de funciones simples f es $\int \sum \alpha_i \chi_{A_i} d\mu := \sum \alpha_i \mu(A_i)$ con los A_i's ajenos.
ii) La integral de una función medible no negativa f es

$$\int f d\mu := \sup_{f \geq g \text{ simples}} \int g d\mu.$$

iii) Integral de una función medible f es $\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$ donde $f^+ := \text{máx}(f, 0)$ y $f^- := (-f)^+$.
iv) f es integrable si $\int |f| d\mu < \infty$, y el espacio $L_1(X, \Omega, \mu)$ es el conjunto de funciones integrables.

Como parte de la definición tenemos $\int_E f d\mu := \int f \chi_E d\mu$.

Proposición A.4.7. *La integral indefinida $\nu(E) := \int_E f d\mu$ es una medida si f es no negativa.*

Teorema A.4.8. ***(de convergencia monótona de Lebesgue)*** *Sea $f_1, f_2, \ldots$ una sucesión creciente de funciones medible no negativas tal que convergen a f puntualmente. Entonces $\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$.*

Lema A.4.9. ***(de Fatou)*** *Para cualquier sucesión de funciones medibles no negativas f_n se tiene $\int \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$.*

Teorema A.4.10. ***(de convergencia dominada)*** *Sean $f_1, f_2, \ldots$ un sucesión de funciones medibles que convegen puntualmente a f, y para las cuales $|f_n| \leq g$ con g integrable. Entonces $\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$.*

Definición A.4.11. Sean μ y ν dos medidas, se dice que ν es absolutamentes continua con respecto a μ, denotado $\nu \ll \mu$, si $\mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0$.

Teorema A.4.12. ***(de Radon-Nykodym)*** *Sean μ y ν medidas $\sigma-$finitas y supongase que $\nu \ll \mu$. Entonces existe $f \geq 0$ medible, denotada $\frac{d\nu}{d\mu}$ y llamada la derivada de Radon-Nykodym, tal que $\nu(E) = \int f d\mu$.*

Definición A.4.13. El espacio $L_p(X, \Omega, \mu)$ es $\{f : |f|^p \in L_1\}/\sim$, donde $f \sim g \Leftrightarrow \mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

Se sabe que L_p es un espacio lineal normado cuando $1 \leq p \leq \infty$, con norma $\|f\|_p := \left(\int |f|^p\right)^{1/p}$ cuando $1 \leq p < \infty$, y $\|f\|_\infty := \inf\{M : f \leq M \text{ para casi todo punto}\}$. **Para casi todo punto** significa que no se cumple para un conjunto de medida cero.

Teorema A.4.14. ***(de Riesz-Fisher)*** *Para $1 \leq p \leq \infty$, L_p es completo.*

Teorema A.4.15. ***(de representación de Riesz)*** *Sea $F : L_p \to \mathbb{R}$ una funcional lineal acotada. Si $1 \leq p < \infty$, entonces existe $f \in L_q$ (donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) tal que $(\forall g \in L_p) F(g) = \int f g d\mu$ y $\|F\| = \|f\|_q$.*

A.5. Teorema de Arzelá-Ascoli

Definición A.5.1. Sea K un conjunto topológico y S un subconjunto de las funciones continuas en K, i.e. $S \subset C(K)$. Se dice que S es equicontinuo si

$$(\forall x \in K)(\forall \epsilon > 0)(\exists U(x, \epsilon) \subset K)|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

para toda $f \in S$ y toda $y \in U(x), \epsilon)$.

Teorema A.5.2 (Arzelá-Ascoli)**.** *Sea K un conjunto compacto y de Hausdorff, y sea $S \subset C(K)$. Entonces S es relativamente compacto si y solo si S es acotado y equicontinuo*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea M tal que $(\forall f \in S)\ \|f\|_\infty \leq M$. Por ser $\overline{S}$ compacto existe $F = \{f_1, \ldots, f_n\} \subset S$ tal que $(\forall f \in S)(\exists f_i \in F)\|f - f_i\|_\infty < \epsilon/3$. Así, $\|f\|_\infty \leq \|f - f_i\|_\infty + \|f_i\|_\infty < \epsilon/3 + M$, por lo tanto S es acotado.

(Equicontinuidad) Para $x \in K$ y $\epsilon > 0$ arbitrarios, sea $U_i(x, \epsilon)$ tal que $(\forall y \in U_i(x, \epsilon))|f_i(x) - f_i(y)| < \epsilon/3, i = 1, \ldots, n$.
Luego, si $y \in U(x, \epsilon) = \bigcap_{i=1}^n U_i(x, \epsilon)$, entonces

$$(\forall f \in S)(\exists f_i \in F)|f(x) - f(y)| = |f(x) - \pm f_i(x) \pm f_i(y) - f(y)| < \epsilon,$$

por lo tanto S es equicontinua.

($\Leftarrow$) Sea $\epsilon > 0$ fijo. Por ser S equicontinua y K compacto, existen $U(x_i, \epsilon), i = 1, \ldots, n$ que cubren K, y son tales que

$$(\forall f \in S)(\forall y \in U(x_i, \epsilon))|f(x_i) - f(y)| < \epsilon/3.$$

Como S es acotado, el conjunto $\{(f(x_1), \ldots, f(x_n)) : f \in S\}$ es acotado en $\mathbb{C}^n$ (y su cerradura es un compacto por Heine-Borel), por lo que existe $F = \{f_1, \ldots, f_m\} \subset S$ tal que

$$(\forall f \in S)(\exists f_r \in F)|(f(x_1), \ldots, f(x_n)) - (f_r(x_1), \ldots, f_r(x_n))| < \epsilon/3. \quad (*)$$

Así, para $x \in K$ arbitrario, $x \in U(x_j, \epsilon)$ para algún $j = 1, \ldots, n$, y para cualquier $f \in S$ hay $f_r \in F$ con la propiedad $(*)$, por lo que

$$|f(x) - f_r(x)| \leq |f(x) \pm f(x_j) \pm f_r(x_j) - f_r(x)| < \epsilon.$$

Se sigue que $(\forall f \in S)(\exists f_r \in F)\ \|f - f_r\|_\infty < \epsilon$, por lo tanto S es totalmente acotado, luego relativamente compacto. $\square$

Índice alfabético