# Introducción

(1)

**Def 1.** Los números complejos $\mathbb{C}$ son todas las parejas $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ dotados con las operaciones

$$\begin{aligned}(a,b)+(c,d)&=(a+b,\ b+d)\\ (a,b)\cdot(c,d)&=(ac-bd,\ bc+ad).\end{aligned}\tag{1}$$

**Nota 1.** Si decimos que $i$ es tal que $i^2=-1$, e identificamos $(a,b)=a+ib$, entonces la operaciones descritas surgen de usar álgebra convencional.

Así, (1) surge de $\underset{=\,\dots}{(a+ib)+(c+id)}$ y de $\underset{=\,\dots}{(a+ib)\cdot(c+id)}$.

**Prop 1.** $\mathbb{C}$ forma un campo, i.e. un anillo conmutativo con división.

**Idea.** Está claro que $(0,0)$ es el neutro aditivo, y el $(1,0)$ es el neutro multiplicativo.

Para encontrar el inverso multiplicativo de $(a,b)$, queremos $(a,b)\cdot(c,d)=(1,0)$, luego $(1,0)=(ac-bd,\ bc+ad)$, de donde surgen los valores de $c$ y $d$.

**Def 2.** i) Si $z=a+ib\in\mathbb{C}$, $a=\mathcal{R}(z)$ y $b=\mathcal{I}(z)$ (parte real e imaginaria

ii) $\bar z=a-ib$, el conjugado.

iii) $|z|:=\sqrt{a^2+b^2}$, el módulo o norma de $z$.

**Ejercicios.** i) Identifique $(a+ib)\cdot(c+id)^{-1}$ de la forma $x+iy$.

**Sol.** $\dfrac{a+ib}{c+id}=\dfrac{a+ib}{c+id}\cdot\dfrac{c-id}{c-id}=$

ii) Pruebe que $|z|^2=z\cdot\bar z$, $\mathcal{R}(z)=\frac{1}{2}(z+\bar z)$, $\mathcal{I}(z)=\frac{1}{2i}(z-\bar z)$, $\overline{z+w}=\bar z+\bar w$, $\overline{zw}=\bar z\cdot\bar w$, $|zw|=|z||w|$, $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$, $|\bar z|=|z|$.

**Nota 2.** i) Se observa que la suma en $\mathbb{C}$ corresponde a la suma de vectores en $\mathbb{R}^2$.

ii) La representación en coordenadas polares de $\overset{=x+iy}{z} \in \mathbb{C}$ es

$$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta), \text{ donde } r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \text{ y}$$

$$\theta = \arg(z) = \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

iii) La norma de multiplicación $z = (x+iy)(a+ib)$ es la multiplicación de las normas $|x+iy|$ y $|a+ib|$: $|z| = |x+iy| \cdot |a+i$

El ángulo de $z$ es la suma de los ángulos de cada vector. En efecto,

si $x+iy = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$ y $a+ib = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$,

entonces
$$(x+iy)\cdot(a+ib) = r_1 r_2 \left\{ (\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1 \text{sen}\,\theta_2) + i(\cos\theta_1 \text{sen}\,\theta_2 + \text{sen}\,\theta_1 \cos\theta_2) \right\}$$

Usando las identidades trigonométricas

$$\text{sen}(x \pm y) = \text{sen}\,x \cos y \pm \cos x\, \text{sen}\,y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \text{sen}\,x\, \text{sen}\,y,$$

tenemos $(x+iy)(a+ib) = r_1 r_2 \left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1+\theta_2)\right)$.

iv) La función $z \mapsto \bar{z}$ es una reflexión (es una involución).

Corolario 1 (de iii) (Fórmula de De Moivre)

$$z^n = r^n\left(\cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta)\right).$$

Ejercicio. Dado $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, encuentre $w \in \mathbb{C}$ tal que $w^n = z$

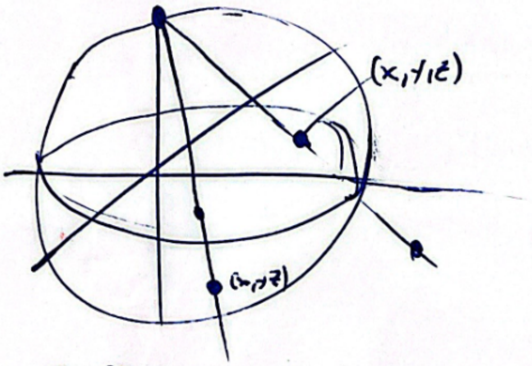
# La proyección estereográfica



Sea $S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$ la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$.

Si $a+ib\in\mathbb{C}$, entonces para algún $(x,y,z)\in S^2$ y $t\in\mathbb{R}$ se tiene

$$(a,b,0)=(0,0,1)+t\big((x,y,z)-(0,0,1)\big)=\big(tx,\ ty,\ 1+t(z-1)\big).$$




De donde $t=\frac{1}{1-z}$, por lo que

$$(a,b,0)=\left(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z},0\right).$$

**Def:** La proyección estereográfica es el mapeo

$$f(x,y,z):=\frac{x+iy}{1-z},\quad \text{para } (x,y,z)\in S^2\setminus\{(0,0,1)\}.$$

Por otro lado, la recta en $\mathbb{R}^3$ que une a $a+ib$ con $(x,y,z)\in S^2$ es $\{t\cdot(0,0,1)+(1-t)(a,b,0) : t\in\mathbb{R}\}$.

Para algún $t$, la recta toca a $S^2$ en $(x,y,z)$, como este es de norma 1,

$$1=(1-t)^2a^2+(1-t)^2b^2+t^2=(1-t)^2\cdot|a+ib|^2+t^2,$$

luego $1-t^2=(1-t)^2\cdot|a+ib|^2$. De donde $t=\frac{|a+ib|^2-1}{|a+ib|^2+1}$, para $t\neq 1$.

Por lo tanto

$$f^{-1}(a+ib)=\left(\frac{2a}{|a+ib|^2+1},\frac{2b}{|a+ib|^2+1},\frac{|a+ib|^2-1}{|a+ib|^2+1}\right)\in S^2.$$

4

**Def 4.** Los números complejos extendidos, denotado $\hat{\mathbb{C}}$, es $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ tal que

i) $(\forall z \in \mathbb{C})$ $z + \infty = \infty + z = \infty$ y $z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty$.

ii) $\frac{z}{0} = \infty$ y $\frac{z}{\infty} = 0$.

Sin embargo, no es posible definir $\infty + \infty$ o $\infty \cdot 0$ sin violar la estructura aritmética de $\mathbb{C}$.

La esfera de Riemann es $S^2$ con la estructura algebraica de $\hat{\mathbb{C}}$, identificando $(0,0,1)$ con $\infty$ y usado la proyección estereográfica.