

Def 26. Sea $A \subset \mathbb{C}$ un dominio, y $\gamma_0, \gamma_1: [a, b] \rightarrow A$ dos curvas cerradas. Decimos que γ_0 es homotópica a γ_1 en A si existe una función continua $\Gamma: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow A$ tal que i) $\Gamma(s, 0) = \gamma_0(s)$, $\Gamma(s, 1) = \gamma_1(s)$, $s \in [a, b]$,
ii) $\Gamma(a, t) = \Gamma(b, t)$, $t \in [0, 1]$.



Teo 32. (~~Sea $A \subset \mathbb{C}$ abierto y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa~~ de deformación)

Sea $A \subset \mathbb{C}$ abierto y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa.

Si $\gamma_0, \gamma_1: [0, 1] \rightarrow A$ son dos curvas rectificables, cerradas y homotópicas entre sí, entonces $\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$.

Dem. Sea $\Gamma: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow A$ la homotopía entre γ_0 y γ_1 .

Como Γ es continua y $[0, 1] \times [0, 1]$ es compacto, entonces

- i) $\Gamma([0, 1]^2)$ es compacto en A , y
- ii) $\Gamma: [0, 1]^2 \rightarrow A$ es uniformemente continua.

De esto, i) $r := \text{dist}(\Gamma([0, 1]^2), A^c) = \inf_{x \in \Gamma([0, 1]^2), y \in A^c} |x - y| > 0$,

ii) existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|\Gamma(s, t) - \Gamma(s', t')| < r$,

cuando $\|(s, t) - (s', t')\| < \frac{r}{n}$, con $(s, t), (s', t') \in [0, 1]^2$.

Sea $z_{j,n} = \Gamma(\frac{j}{n}, \frac{k}{n})$, $0 \leq j, k \leq n$ y $J_{j,n} = [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}] \times [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, $0 \leq j, k \leq n-1$.

Como $\text{diam}(J_{j,n}) = \frac{\sqrt{2}}{n}$, de ii) se tiene que $\Gamma(J_{j,n}) \subset B_r(z_{j,n})$.

Así, el polígono $P_{j,n} = [z_{j,n}, z_{j+1,n}, z_{j+1,n+1}, z_{j,n+1}, z_{j,n}]$ es cerrado y está contenido en $B_r(z_{j,n})$, luego, por el Teo de Cauchy $\int_{P_{j,n}} f = 0$.

Sea $Q_n := [z_{0,n}, z_{1,n}, \dots, z_{n,n}]$; por demostrar que

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{Q_0} f = \dots = \int_{Q_n} f = \int_{\gamma_1} f. \quad (*)$$

Sea $\sigma_j(t) = \gamma_0(t)$ para $t \in [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}]$, $j=0, 1, \dots, n-1$.



Cada σ_j une los puntos $z_{j,0}$ y $z_{j+1,0}$. Así, concatenando σ_j con $[z_{j+1,0}, z_{j,0}]$ formamos una curva cerrada, la cual está contenida en

$$B_r(z_{j,0}), \text{ por lo que } \int_{\sigma_j} f = - \int_{[z_{j+1,0}, z_{j,0}]} f = \int_{[z_{j,0}, z_{j+1,0}]} f.$$

Sumando sobre j tenemos $\int_{\gamma_0} f = \int_{Q_0} f$ y similarmente $\int_{\gamma_1} f = \int_{Q_n} f$.

Ahora bien, como $\int_{P_{j,n}} f = 0$, $0 \leq j \leq n-1$, $\sum_{j=0}^{n-1} \int_{P_{j,n}} f = 0$, $n=0, 1, \dots, n-1$

Sin embargo, notemos que $\int_{P_{j,n}} f$ y $\int_{P_{j+1,n}} f$ ocupan el mismo polígono

$[z_{j+1,n}, z_{j,n}]$, para cada $j=0, 1, \dots, n-1$, pero en dirección contraria.

~~Entonces~~ Al sumar dichos polígonos se cancelan mutuamente, quedando

$$0 = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{P_{j,n}} f = \int_{Q_n} f - \int_{Q_{n-1}} f. \text{ Podemos entonces concluir } (*).$$

Cor 12. (de Cauchy, versión homotópica) Si una curva γ es homotópica a un punto, $\int_{\gamma} f = 0$.

Sea $\gamma(t) = r \cdot e^{it}$, $t \in [0, 2\pi n]$, $n \in \mathbb{N}$. Vemos que $\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi n} \frac{1}{re^{it}} \cdot r i e^{it} dt = 2\pi n i$. (59)

Similarmente $\int_{\beta} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi n i$, $\beta(t) = z_0 + r e^{it}$, $t \in [0, 2\pi n]$.

Si f es holomorfa, ~~en $\mathbb{C}$~~ , por el Teo de deformación,

~~$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_{\beta} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$~~ $\int_{\beta} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_{\beta_\epsilon} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$, donde $\beta_\epsilon(t) = z_0 + r \cdot \epsilon \cdot e^{it}$.

Intuitivamente $\int_{\beta_\epsilon} \frac{f(z)}{z-z_0} dz \approx \int_{\beta_\epsilon} \frac{f(z_0)}{z-z_0} dz = 2\pi n i \cdot f(z_0)$.

Teo 33

~~Sea~~ Sea $A \subset \mathbb{C}$ abierto y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa.

Entonces, $(\forall z_0 \in A) \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi n i f(z_0)$, donde $\gamma(t) = z_0 + r e^{it}$, $t \in [0, 2\pi n]$, es homotópica a z_0 .

Dem. Queremos probar que $0 = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz - \int_{\gamma} \frac{f(z_0)}{z-z_0} dz = \int_{\gamma} g(z) dz$, (*)

donde $g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0} & z \neq z_0 \\ f'(z_0) & z = z_0 \end{cases}$, la cual es holomorfa en

$A \setminus \{z_0\}$, pero continua en todo A . Por hipótesis, γ es homotópica a $\gamma_\epsilon(t) = z_0 + r \cdot \epsilon \cdot e^{it}$. Por el Teo de deformación, $\int_{\gamma} g = \int_{\gamma_\epsilon} g$.

Como g es continua en z_0 , dado $\delta > 0$, hay $M > 0$ tal que $(\forall z \in \overline{B_\delta(z_0)}) g(z) < M$. Así, para $\epsilon < \delta$, $|\int_{\gamma_\epsilon} g| \leq M \cdot 2\pi n r \epsilon$.

Como ϵ es arbitrario, podemos concluir (*).

(60)

~~Sea~~ Sea $A \subset \mathbb{C}$ abierto y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa.

Tomemos $z_0 \in A$ y $r > 0$ tal que f es holomorfa en $B_r(z_0)$.

Por el Tco anterior, $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z_0} dw$, donde $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Por el Tco de Deformación, si $z \in B_r(z_0)$, $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = f(z)$.

Por otro lado, cuando $w \in \gamma([0, 2\pi])$,
 $\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{1}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^n$



$$\text{Así, } \frac{1}{2\pi i} \frac{f(w)}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \cdot \frac{f(w)}{2\pi i (w-z_0)^{n+1}}$$

Si podemos intercambiar la suma con la integral tendríamos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \cdot a_n, \quad \text{con } a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw.$$

Veamos que esto es posible. Notemos que cuando $w \in \gamma([0, 2\pi])$

$$|f(w)| \cdot \left| \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} \right| \leq \frac{M}{r} \cdot \frac{|z-z_0|^n}{r^n}, \quad \text{donde } M = \max_{w \in \gamma([0, 2\pi])} |f(w)|.$$

Como $\left| \frac{z-z_0}{r} \right| < 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (f(w)) \cdot \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$ converge normalmente,

luego uniformemente en $B_r(z_0)$. Por un siguiente lema, concluimos el

Tco 34. Si f es holomorfa en $B_r(z_0)$,

$$(\forall z \in B_r(z_0)) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z-z_0)^n, \quad \text{donde } a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw, \quad n=0, 1, \dots$$

$$\gamma(t) = z_0 + r \cdot e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Además, el vector de convergencia de $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es menor o igual a r .

Leña 4. Sea $A \subset \mathbb{C}$ abierto, $\gamma: [a, b] \rightarrow A$ rectificable

(61)

y $f, f_n: A \rightarrow \mathbb{C}$ continuas. Si $f_n \rightarrow f$ uniformemente en A ,
entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n = \int_{\gamma} f$.

Dem. Sea $\varepsilon > 0$. Por convergencia uniforme, hay $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{V(\gamma)} \text{ para toda } z \in A \text{ y } n > N.$$

$$\text{Luego } \left| \int_{\gamma} f_n - \int_{\gamma} f \right| \leq \left| \int_{\gamma} (f_n - f) \right| \leq \frac{\varepsilon}{V(\gamma)} \cdot V(\gamma), \quad n > N.$$

Cor 13. (con las condiciones de Teo 34,

i) f es infinitamente diferenciable,

$$\text{y } \left(\forall z_0 \in A \right) f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw, \text{ con } \gamma(t) = z_0 + r e^{it},$$

$$t \in [0, 2\pi]$$

y r es tal que $B_r(z_0) \subset A$.

$$\text{ii) (Cota de Cauchy), } |f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \cdot M, \text{ donde } M = \max_{w \in \gamma([0, 2\pi])} |f(w)|$$

iii) f tiene primitiva en $B_r(z_0)$ dada por

$$F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot (z - z_0)^{n+1}.$$

La expresión del Teo 34 es la serie de Taylor de f alrededor de z_0 .

Si la función es entera, $\{a_n\}$ tiene radio de convergencia infinito.

Los polinomios, que son funciones enteras, no pueden estar acotadas. (62)
 En efecto, $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = z^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n}\right)$,
 luego $|P(z)| \rightarrow \infty$ si $|z| \rightarrow \infty$. En general tenemos que

Teo 35 (de Liouville). Una función entera y acotada tiene que ser constante.

Dem. Si $(\forall z \in \mathbb{C}) |P(z)| < M$. Por la Cota de Cauchy
 $|P'(z)| < \frac{M}{r}$ para r arbitrariamente grande.

Luego $|P'(z)| = 0 \therefore P' = 0$.

Teo 36. (Fundamental del álgebra). Si $P(z)$ es un polinomio no constante, entonces existe $a \in \mathbb{C}$ tal que $P(a) = 0$.

Dem. Si $(\forall z \in \mathbb{C}) P(z) \neq 0$, $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ es entera.

Pero $|f(z)| \rightarrow 0$ si $z \rightarrow \infty$. Como f es continua, dado M , hay $r > 0$ tal que $|f(z)| < M$ si $|z| > r$. Como f es acotada en $\overline{B_r(0)}$, concluimos que f es acotada en $\mathbb{C}$, pero al ser entera, por el Teo de Liouville, f es constante, lo cual es una contradicción.

Def 27. Sea $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y $a \in \mathbb{C}$ tal que $f(a) = 0$.

Decimos que a es un cero de f con multiplicidad $m \geq 1$, si

hay $g: A \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que $P(z) = (z-a)^m \cdot g(z)$, con $g(a) \neq 0$.

Ejercicio. Si p es un polinomio de grado K y $a_1, \dots, a_m$ son sus ceros con multiplicidades $k_1, \dots, k_m$, entonces $p(z) = C \cdot (z-a_1)^{k_1} \dots (z-a_m)^{k_m}$ y $k_1 + \dots + k_m = K$.