

(63)

Continuación analítica

Teo 37. Sea $A \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo. Para $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa las siguientes son equivalentes:

i) $f=0$ en A .

ii) Los ceros de f tienen al menos un punto de acumulación en A .

iii) Existe $z_0 \in A$ tal que $f^{(n)}(z_0) = 0$ para todo $n = 0, 1, \dots$

Dem. i) $\Rightarrow$ ii) y iii) es directo.

ii) $\Rightarrow$ iii). Sea $z_0 \in A$ un punto límite de $B = \{z \in A : f(z) = 0\}$ y $r > 0$ tal que $B_r(z_0) \subset A$. Como z_0 es punto límite de B y es continua en A , $f(z_0) = 0$.

Supongamos que hay $n \geq 1$ tal que $f^{(k)}(z_0) = 0$ para $k \leq n$ y $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Así, la expansión de Taylor de f alrededor de z_0 es $f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k$ para $z \in B_r(z_0)$.

Luego $f(z) = g(z) \cdot (z - z_0)^n$ con $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} (z - z_0)^k$.

Como g es analítica, en particular continua en $B_r(z_0)$ y $g(z_0) = a_n \neq 0$, hay $0 < r_0 < r$ tal que $g(z) \neq 0$ en $B_{r_0}(z_0)$. Pero esto contradice que z_0 es punto límite de B , pues $(\forall \epsilon > 0) (\exists w \in B_\epsilon(z_0)) f(w) = 0$.

(64)

iii) $\Rightarrow$ i). Sea $w \in A$. Como A es conexo hay polígono $p([0,1]) \rightarrow A$ que une a z_0 y w . Sea $r := \text{dist}(A^c, p([0,1]))$. Como $p([0,1])$ es compacto hay partición finita $\{t_0=0, t_1, \dots, t_{m-1}, t_m=1\}$ tal que $\{B_{r/2}(z_i)\}_{i=0}^m$, con $z_i = p(t_i)$, forma una cubierta finita de $p([0,1])$ y además podemos tener que $\{z_i, z_{i+1}\} \subset B_{r/2}(z_i) \cap B_{r/2}(z_{i+1}), i=0, \dots, m-1$. Al tomar la expansión de Taylor de f en z_0 , i.e.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \text{ vemos por la hipótesis que } f=0 \text{ en } B_{r/2}(z_0).$$

Pero como $z_1 \in B_{r/2}(z_0)$, tenemos que $f^{(n)}(z_1) = 0$ para $n=0,1,\dots$

Al hacer la expansión de Taylor de f en z_1 , concluimos que $f=0$ en $B_{r/2}(z_1)$. Así sucesivamente llegamos a que $f(w)=0$.

Como $w \in A$ es arbitrario, concluimos que $f=0$ en A .

Cor 14. Sea $A \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo.

i) Sean f y g holomorfas en A . Si f y g coinciden en una sucesión de puntos que convergen en A , o tienen la misma expansión de Taylor en alguna bola, entonces $f=g$ en A .

ii) Para $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa no-constante en A los ceros están aislados.

iii) Si $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa no idénticamente cero en A , entonces para cada cero $z_0 \in A$ de f , hay $n \in \mathbb{N}$ y $g: A \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa con $g(z_0) \neq 0$ tal que $f(z) = (z-z_0)^n \cdot g(z), z \in A$.
(i.e. los ceros de f tienen multiplicidad finita).

Teo 38 (del módulo máximo). Sea $A \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo.

Sea $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Si hay $z_0 \in A$ tal que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$, entonces f es constante.

Dem. Sea $\overline{B_r(z_0)} \subset A$ y $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$\text{Por la fórmula integral de Cauchy, } f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{z_0 + re^{it} - z_0} \cdot ir e^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

$$\text{Así, usando la hipótesis, } |f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt \leq |f(z_0)|.$$

$$\text{Luego } 0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0) - f(z_0 + re^{it})| dt. \text{ Como } |f(z)| \leq |f(z_0)| \text{ en } A,$$

el integrando es no-negativo. Esto implica de $|f(z_0 + re^{it})| = |f(z_0)|$

para $t \in [0, 2\pi]$ y $r_0 < r$. ^{De esto} ~~se deduce~~ $|f(z)| = |f(z_0)|$ en $B_r(z_0)$,

i.e. $f(z) \cdot \overline{f(z)}$ es constante. Así, si $f = u + iv$, tenemos que

$f \cdot \bar{f} = u^2 + v^2$ es constante. Derivando c.r.a. x y y , llegamos

a que $2u u_x + 2v v_x = 0 = 2u u_y + 2v v_y$ y por las ec. C.R.

$u u_x - v u_y = 0 = u u_y + v u_x$, pero esto implica que

$u_x = u_y = 0 \therefore f$ es constante en $B_r(z_0)$.

Por el principio de continuación analítica, f es constante en A .

Cor 15. Sea A ~~ab~~ abierto y acotado. ~~Si f es holomorfa en A y continua en $\bar{A}$, entonces~~

Si f es holomorfa en A y continua en $\bar{A}$, entonces

$$\max \{ |f(z)| : z \in \bar{A} \} = \max \{ |f(z)| : z \in \partial A \}.$$

Lema 5 (de Schwarz)

Sea $D := D_r(0)$ y $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que

i) $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in D$,

ii) $f(0) = 0$.

Entonces $|f'(0)| \leq 1$ y $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in D$.

Más aún, si $|f'(0)| = 1$ o si $|f(z)| = |z|$ para alguna $z \in D \setminus \{0\}$, entonces hay $c \in \mathbb{C}$ ~~uniquely~~ de módulo 1 tal que

$$(\forall z \in D) \quad f(z) = c \cdot z.$$

Dem. Definamos $g: D \rightarrow \mathbb{C}$ como $g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & z \neq 0 \\ f'(0) & z = 0 \end{cases}$.

Por lo que g es holomorfa en D . Por el Teorema del módulo máximo, ^{(ver (1))}
 si $r < 1$ $(\forall z \in \overline{B_r(0)}) |g(z)| \leq \sup_{|z|=r} |g(z)| \leq \frac{1}{r}$.

Como esto se cumple para todo $r \in (0, 1)$, $(\forall z \in D) |g(z)| \leq 1$,
 i.e. $|f(z)| \leq |z|$. Además, $|f'(0)| = \lim_{z \rightarrow 0} |g(z)| \leq 1$.

Si hay $z_0 \in D$ con $|f(z_0)| = |z_0|$ o $|f'(0)| = 1$, entonces g alcanza su máximo dentro de D , y de nuevo por el Teorema del módulo máximo, g es una constante c de módulo 1.

Así $f(z) = c \cdot z$ para todo $z \in D$.

$$\begin{aligned} (*) \quad \frac{g(z) - g(0)}{z - 0} &= \frac{\frac{f(z)}{z} - f'(0)}{z} = \frac{\sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-0)^{n-1}}{z} - f'(0) = \frac{\frac{1}{z} \left(f'(0) + f'(0) \cdot z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \right) - f'(0)}{z} \\ &= a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n z^{n-2} \xrightarrow{z \rightarrow 0} a_2. \end{aligned}$$

p (67)

Prop 17 ^{Sea} $D := B(0)$ y $f: D \rightarrow D$ holomorfa y biyectiva.

Entonces $f(z) = e^{i\theta} \cdot \frac{z_0 - z}{1 - \bar{z}_0 z}$, con $|z_0| < 1$ y $\theta \in [0, 2\pi)$.

Dem. Sea $a := f(0)$ y definamos

$$h(z) := \frac{a - f(z)}{1 - \bar{a} f(z)} = T(f(z)), \text{ donde } T_a(z) = \frac{a - z}{1 - \bar{a} z}.$$

Así, $h: D \rightarrow D$ es holomorfa y biyectiva.

Vemos que $h(0) = 0$ y que $|h(z)| \leq 1$ para toda $z \in D$,

luego, por el Lema 5, $|h(z)| \leq |z|$ en D . (*)

Se puede verificar que $h^{-1}: D \rightarrow D$ es holomorfa y también que $h^{-1}(0) = 0$ y $|h^{-1}(z)| < 1$ en D . De nuevo, por el Lema 5,

$|h^{-1}(z)| \leq |z|$. Equivalentemente, usando el cambio de variable

$w := h^{-1}(z)$, tenemos que $|w| \leq |h(w)|$ para $w \in D$.

Por (*), $|h(z)| = |z|$ en D .

Entonces, de nuevo, por el Lema 5, hay $c \in \mathbb{C}$ de norma 1 tal que $h(z) = c \cdot z$, i.e. $f(z) = T_a^{-1}(c \cdot z)$.

Pero $T_a^{-1}(c \cdot z) = c \cdot \frac{\bar{c} \cdot a - z}{1 - c \bar{a} \cdot z}$ lo cual cumple lo deseado.

Un recíproco del Teo de Cauchy es el

Teo 39 (de Morera). Sea $A \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo. Si $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ es continua y tal que $\int_{\gamma} f = 0$ para todo polígono triangular en A (incluyendo el interior), entonces f es holomorfa en A .

Dem. Sea $D := B_r(z_0) \subset A$. Definir $F(z) := \int_{[z_0, z]} f$ para $z \in D$.

Por la hipótesis, para $w \in D$ arbitrario, $F(z) = \int_{[z_0, w]} f + \int_{[w, z]} f$.

$$\text{Luego } \frac{F(z) - F(w)}{z - w} = \frac{1}{z - w} \int_{[w, z]} f$$

$$\frac{F(z) - F(w)}{z - w} - f(w) = \frac{1}{z - w} \int_{[w, z]} (f(\xi) - f(w)) d\xi.$$

De esto,

$$\left| \frac{F(z) - F(w)}{z - w} - f(w) \right| \leq \sup \{ |f(\xi) - f(w)| : \xi \in [w, z] \}.$$

Por continuidad de f , cuando $z \rightarrow w$, lo anterior converge a cero.

Siendo f holomorfa, y f su derivada, entonces F es diferenciable.

Prop 18. Sea $A \subset \mathbb{C}$ abierto y simplemente conexo (i.e. toda curva cerrada en A es homotópica a un punto en A).

Si $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y no se anula en A , entonces hay $g: A \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que $e^{g(z)} = f(z)$ en todo A .

Dem. Sea $z_0 \in A$ fijo. Definamos

$$h(z) := \int_{\gamma_z} \frac{f'}{f}, \text{ donde } \gamma_z: [0,1] \rightarrow A$$

une z_0 y z . Como A es simplemente conexo, h solo depende de z_0 y z , i.e. la integral es independiente de la trayectoria de γ_z .

Ahora, sea $B_r(z) \subset A$ y $t \in [0,1]$ tal que $z_1 := \gamma_z(t) \in B_r(z)$.

$$\text{Sea } \beta_1(t) := \begin{cases} \gamma_z(t) & t \leq t_1 \\ [z_1, z](t) & t \geq t_1 \end{cases}$$



$$\text{Sea } w \in B_r(z) \text{ y definimos } \beta_2(t) := \begin{cases} \gamma_z(t) & t \leq t_1 \\ [z_1, w](t) & t \geq t_1 \end{cases}$$

$$\text{Así, } \frac{h(z) - h(w)}{z - w} = \frac{\int_{\gamma_z} \frac{f'}{f} - \int_{\gamma_w} \frac{f'}{f}}{z - w} = \frac{\int_{\beta_1} \frac{f'}{f} - \int_{\beta_2} \frac{f'}{f}}{z - w} = \frac{\int_{[z_1, z]} \frac{f'}{f} - \int_{[z_1, w]} \frac{f'}{f}}{z - w} = \int_{[z, w]} \frac{f'}{f}$$

Cuando $w \rightarrow z$, lo anterior converge a $\frac{f'}{f}(z)$.

$$\text{Luego } (e^{-h(z)} \cdot f(z))' = -h'(z) e^{-h(z)} f(z) + e^{-h(z)} \cdot f'(z) = 0.$$

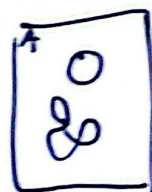
Por lo tanto $e^{-h} \cdot f$ es constante, y como $h(z_0) = 0$, dicha constante es $f(z_0)$. $\therefore f(z) = e^{h(z)} f(z_0)$.

Def 27. Sean $A \subset \mathbb{C}$ abierto y $\gamma: [0,1] \rightarrow A$ cerrada y rectificable.

i) $I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$ es el número de giro de γ c.r.a z_0 .

ii) γ es homóloga a 0 c.r.a. A si:

$(\forall z \notin A) I(\gamma, z) = 0$. Denotado $\gamma \sim 0$.



iii) Sea $\sigma: [0,1] \rightarrow A$ también cerrada y rectificable.

γ y σ son homólogas en A si $(\forall z \notin A) I(\gamma, z) = I(\sigma, z)$.

iii) Un ciclo (ó cadena cerrada) β es una colección finita de curvas cerradas y rectificables $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$

Prop 19. Si $z_0 \notin \gamma([0,1])$, entonces $I(\gamma, z_0) \in \mathbb{Z}$.

Dem. ~~Por el Lema 3, supongamos que γ es un polígono.~~

Por el Lema 3, supongamos que γ es un polígono.

Definamos $g(t) := \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0} ds$. Así, $g(0) = 0$ y $g(1) = \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$ y

$$g'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}, \quad t \in [0,1]$$

$$\text{De esto } \frac{d}{dt} \left[e^{-g(t)} (\gamma(t) - z_0) \right] = e^{-g(t)} \gamma'(t) - (\gamma(t) - z_0) e^{-g(t)} g'(t) = 0.$$

Como la función es constante $e^{-g(0)} (\gamma(0) - z_0) = e^{-g(1)} (\gamma(1) - z_0)$.

Luego $e^{-g(1)} = 1 \quad \therefore g(1) = 2\pi i \cdot K, \quad K \in \mathbb{Z}$.

Por el Teo. de Deformación,

Prop 20 Si γ y σ son homotópicas en A , entonces son homólogas.

Si γ es homotópica a un punto, es homóloga a 0.

Prop 21. (Regla de Leibniz compleja) Sean A y B abiertas en $\mathbb{C}$ y $\textcircled{+1}$

$\gamma: [a, b] \rightarrow B$ rectificable. Si $F: A \times B \rightarrow \mathbb{C}$ es continua, entonces ~~defin~~
 $g(z) := \int_{\gamma} F(z, w) dw$ es continua. Si además $\frac{dF}{dz}$ existe y es continua
 en $A \times B$, entonces $g'(z) = \int_{\gamma} \frac{dF}{dz}(z, w) dw$.

Lema 6. Sea U abierto, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ continua y $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ rectificable.
 Para cada $m \in \mathbb{N}$ define $F_m(z) := \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^m} dw$ para $z \notin \gamma([a, b])$.
 Entonces F_m es holomorfa en $V := \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$ y

$$F_m'(z) = m \cdot F_{m+1}(z).$$

Dem. i) F_m es continua. Sea $z \in V$. Como $\gamma([a, b])$ es cerrado, hay
 A y B abiertos y ajenos tales que $\gamma([a, b]) \subset B$ y $z \in A$. Así,
 $(w, z) \mapsto \frac{f(w)}{(w-z)^m}$ es continua en $A \times B$. Por la Prop 21, F_m es
 continua en A .

ii) Diferenciabilidad. Tenemos que $\frac{1}{(w-z)^m} - \frac{1}{(w-z_0)^m} =$
 $= \left[\frac{1}{w-z} - \frac{1}{w-z_0} \right] \cdot \sum_{k=1}^m \frac{1}{(w-z)^{m-k}} \frac{1}{(w-z_0)^{k-1}} = (z-z_0) \cdot \sum_{k=1}^m \frac{1}{(w-z)^{m+k-1}} \frac{1}{(w-z_0)^{k-1}}.$

Así, para $z_0 \in V$

$$\frac{F_m(z) - F_m(z_0)}{z - z_0} = \int_{\gamma} \frac{f(w)/(w-z_0)}{(w-z)^m} dw + \dots + \int_{\gamma} \frac{f(w)/(w-z_0)^m}{(w-z)} dw \quad (*).$$

Aplicando i) con $w \mapsto f(w)/(w-z_0)^k$ cada integral es continua.

Demostremos que para enteros n y k $\int_{\gamma} \frac{f(w)/(w-z_0)^k}{(w-z)^n} dw \rightarrow \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+k}} dw$ $\textcircled{+x}$
 cuando $z \rightarrow z_0$. Para el caso $n=1$ tenemos que

$$\left| \int_{\gamma} \frac{f(w)(w-z_0)^k}{(w-z)} dw - \int_{\gamma} \frac{f(w)(w-z_0)^{k-1}}{(w-z_0)} dw \right| = \left| (z-z_0) \cdot \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)(w-z_0)^k} dw \right| \leq |z-z_0| \cdot M \cdot L \quad (***)$$

donde $M = \max \left\{ \left| \frac{f(w)}{(w-z)(w-z_0)^k} \right| : w \in Y([0,1]) \right\}$ y $L = \text{longitud}(Y)$.

Como $|z-z_0| \rightarrow 0$, tenemos $(*)$ para $n=1$.

Suponiendo un método inductivo, probemos $(*)$ para $n+1$, asumiendo para n .

En este caso, como $\frac{1}{(w-z)^{n+1}} = \frac{1}{(w-z)^n(w-z_0)} + \frac{(z-z_0)}{(w-z)^{n+1}(w-z_0)}$,

entonces
$$\int_Y \frac{f(w)(w-z_0)^n}{(w-z)^{n+1}} dw = \int_Y \frac{f(w)(w-z_0)^n}{(w-z)^n} dw + (z-z_0) \int_Y \frac{f(w)(w-z_0)^{n+1}}{(w-z)^{n+1}} dw.$$

El segundo término converge a cero (similar a la desigualdad $(***)$).

Y por el primer paso inductivo se tiene $(*)$.

Así, de $(*)$ surge que $F'_n = n \cdot F_{n+1}$.

Teo 40. (Integral de Cauchy). Sea $A \subset \mathbb{C}$ abierto, $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa

y $\gamma: [0,1] \rightarrow A$ un ciclo homólogo a cero c.r.a. A .

Entonces $(\forall z_0 \in A \setminus \gamma([0,1])) \quad I(\gamma, z_0) \cdot f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz.$

Dem. Definamos

$$F(z, w) := \begin{cases} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} & w \neq z \\ f'(z) & z = w. \end{cases}$$

Para $w \in A$ fijo, $g(z) := F(z, w)$ es holomorfa en A y $f(w) = F(w, w)$ (ver Lema 5 y demostración).

Sea $H := \{w \in \mathbb{C} : I(\gamma, w) = 0\}$. El Lema 6 dice que $I_{\gamma}(w) := I(\gamma, w)$ es

continua y la Prop 19 dice que su imagen es un conjunto discreto,

luego $H := I_{\gamma}^{-1}(0)$ es abierto. Por la hipótesis $A \subset H$,

luego $H \cup A = \mathbb{C}$. Definamos $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$h(z) := \begin{cases} \int_{\gamma} F(z, w) dw & z \in A \\ \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw & z \in H. \end{cases}$$

Para $z \in A$ fijo, $F(z, w): A \rightarrow \mathbb{C}$ es continua, luego $\int_{\gamma} F dw$ existe.

Si $z \in H$, $z \notin Y([0,1])$, más aún, si $z \in A \cap H$,

$$\int_Y F(z, w) dw = \int_Y \frac{F(z) - F(w)}{z - w} dw = \int_Y \frac{F(w)}{w - z} dw.$$

Por lo que $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ está bien definida.

Por el Lema 6, h es holomorfa en H y por la Prop 21, h es holomorfa en A $\therefore h$ es entera.

Ahora, como $Y([0,1])$ es compacto, está contenido en un disco D cerrado.

Entonces $I(Y, z) = 0$ para $z \notin D$, i.e. $D^c \subset H$. Esto nos dice que

H tiene una componente no-acotada, en otras palabras, una vecindad de ∞ . Sea $C \in \mathbb{C}$ tal que $|F(w)| < C$ para $w \in Y([0,1])$.

Como $Y([0,1])$ es compacto $\rho = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{w-z}$ de manera uniforme en

$w \in Y([0,1])$. Sea $M(z) := \max\{|\frac{1}{w-z}| : w \in Y([0,1])\} \rightarrow 0, z \rightarrow \infty$.

$$\text{Así, } \left| \lim_{z \rightarrow \infty} h(z) \right| = \left| \lim_{z \rightarrow \infty} \int_Y \frac{F(w)}{w-z} dw \right| \leq C \cdot M(z) \cdot \text{longitud}(Y) = 0. (*)$$

Entonces, hay $r > 0$ tal que $|h(z)| \leq 1$ cuando $|z| \geq r$.

Pero como h es continua, también está acotada en $\overline{B_r(0)}$.

Por el Teorema de Liouville, h es constante, y por (*), $h = 0$.

Por lo tanto, para $z_0 \notin Y([0,1])$,

$$0 = h(z_0) = \begin{cases} \int_A \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} dz & z_0 \in A \\ \int_Y \frac{F(z)}{z - z_0} dz & z_0 \in H \end{cases} = \int_Y \frac{F(z)}{z - z_0} dz - F(z_0) \cdot I(Y, z_0) \cdot 2\pi i.$$

Ver curva Pochhammer

Corolario 16 i) $\int_A f = 0$ ii) $I(Y, z_0) F(z_0) = \frac{h!}{2\pi i} \int_Y \frac{F(z)}{(z - z_0)^{h+1}} dz.$

