

Teo 41. Sea $A \subset \mathbb{C}$ abierto y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa con una cantidad finita de ceros en A . Si $\gamma: [a, b] \rightarrow A$ es cerrada, rectificable y homóloga a cero c.r.a A , que no toca a los ceros. Entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = \sum_{n=1}^m I(\gamma, a_n),$$

donde $a_1, \dots, a_m$ son los ceros de f , repetidos de acuerdo a sus multiplicidades

Dem. Por el Corol 4, iii), $f(z) = (z-a_1) \cdots (z-a_n) \cdot g(z)$, con $g(z) \neq 0$ en A

Luego $\frac{P'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-a_1} + \dots + \frac{1}{z-a_m} + \frac{g'(z)}{g(z)}$, la cual es holomorfa en

$A \setminus \{a_1, \dots, a_m\}$ y g/g es holomorfa en A .

Entonces $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f} = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a_1} + \dots + \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a_m} + \int_{\gamma} \frac{g'}{g} \right] = \sum_{n=1}^m I(\gamma, a_n).$

Cor 17. Con las condiciones anteriores, pero ahora $p(q_i) = \alpha \in \mathbb{C}, i=1, \dots, m$

tenemos $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{p(z)}{f(z)-a} dz = \sum_{n \geq 0} I(f, a_n).$

$$\text{Ejemplo 1} \quad I = \int_{\gamma} \frac{z+1}{z^2+z+1} \quad , \quad \gamma := \{ z e^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi] \}.$$

Como ~~Es~~ Tomando $f(z) = z^2 + z + 1$, $I = \int \frac{P'}{f}$. Como $f(z)(z-1) = z^3 - 1$, (los ceros de f son los ceros de $z^3 - 1$ no reales, por lo que $w_1, w_2 \in D_2(0)$).

Ans, $J = 2\pi i (1+1) = 4\pi i$.

Ejercicio $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa no-constante $\gamma \in \mathcal{O}_{c, \text{en } A}$. Definir $d := f \circ \gamma$.

Calculus $I(0, z_0)$ from $z_0 \notin \mathcal{V}$.

Sol. $I(0, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dw}{w - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(\gamma(t)) \gamma'(t)}{f(\gamma(t)) - z_0} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(w)}{f(w) - z_0} dw = \sum_{n=1}^m I(\gamma, a_n)$

donde $a_1, \dots, a_m \in A \setminus Y(\tau_1, 1)$ son tales que $f(a_i) = z_0$ y $J(\gamma, a_i) \neq 0$. Como $Y(\tau_1, 1)$

total Profit = $\text{price} \times \text{quantity}$ or revenue minus multiplied: $P(z) - 2000$

Def 28. Una raíz simple de la ecuación $f(z) = z_0$ es un
cero de $F(z) := f(z) - z_0$ con multiplicidad 1.

(75)

Teo 42. Sea $f: B_r(a) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y no-constante.

Si m es la multiplicidad del cero de $f(z) - f(a)$, entonces
existen $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ tal que para $w_0 \in U := B_\delta(f(a)) \setminus \{f(a)\}$,
la ecuación $f(z) = w_0$ tiene exactamente m raíces simples
en $V := B_\epsilon(a) \setminus \{a\}$. En otras palabras, cada punto de U es la imagen
bajo f de m puntos diferentes en V .

Dem. Como los ceros de $f(z) - f(a) = (z-a)^m g(z)$ están aislados en $B_r(a)$,
hay $\epsilon < \frac{r}{2}$ tal que $f(z) = f(a)$ no tiene solución en $A := B_{2\epsilon}(a) \setminus \{a\}$
(i.e. $g \neq 0$), y podemos tomar ϵ tal que $f' \neq 0$ en A , por lo siguiente.
Si $f'(a) = 0$, a es cero de f' , pero el mismo argumento expuesto da lo deseado,
y si $f'(a) \neq 0$, por continuidad de f' , también.

Sea $\gamma(t) = a + \epsilon e^{2\pi i t}$, $t \in [0, 1]$. Definamos $\gamma = f \circ \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$.

Como $f(z) \neq f(a)$ para $z \in A$ y $\gamma([0, 1]) \subset A$, hay $\delta > 0$ tal que $B_\delta(f(a)) \cap \gamma([0, 1]) = \emptyset$.

Así, $B_\delta(f(a))$ está en una componente de $\mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$.

Luego, por el Ejercicio anterior, para $w_0 \in B_\delta(f(a))$, $I(\gamma, f(a)) = I(\gamma, w_0) = \sum_{n=1}^n I(\gamma, b_n)$,

donde $b_1, \dots, b_n \in B_\epsilon(a)$ son tales que $f(b_n) = w_0$, $I(\gamma, b_n) \neq 0$, con posibles repeticiones de
acuerdo a la multiplicidad de los ceros de $f(z) - w_0$.

Pero, también por el Ejercicio anterior, $I(\gamma, f(a)) = m$, pues por hipótesis, el cero de
 $f(z) - f(a)$, que es a , es de multiplicidad m , y claramente $I(\gamma, a) = 1$.

Además, como $I(\gamma, b_n) = 1$, $n = m$. Y como $f' \neq 0$ en $B_\epsilon(a) \setminus \{a\}$, cada raíz de $f(z) = w_0$
es simple. En efecto, como $f(z) - f(b_n) = a_1(z-b_n) + a_2(z-b_n)^2 + \dots$, $f'(z) = a_1 + 2a_2(z-b_n) + \dots$.

Luego $0 \neq f'(b_n) = a_1$, y esto implica que $f(z) - f(b_n) = (z-b_n)g_n(z)$, con $g_n(b_n) \neq 0$. $\square$

Teo 43 (del mapeo abierto).

Sea A abierto y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa no-constante.

Entonces, para todo $U \subset A$, $f(U)$ es abierto.

Dem. Por demostrar que $(\forall a \in U)(\exists \delta > 0) B_\delta(f(a)) \subset f(U)$.

Por el Tco 42, existen $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ tal que $f'(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(a)$.

$$\therefore B_\varepsilon(f(a)) \subset f(B_\delta(a)) \subset f(U). \quad \square$$

Teo 44 (de la función inversa)

Sea $A \subset \mathbb{C}$ abierto y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa e inyectiva.

Entonces $B := f(A)$ es abierto y $f^{-1}: B \rightarrow A$ es holomorfa.

$$\text{Más aún, } (f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)}, \text{ donde } w = f(z). \quad \left((f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \right).$$

Dem. Por el Tco 43, B es abierto y $f^{-1}: B \rightarrow A$ es continua.

Sea $z_0 \in A$. Usando el Tco 42, la multiplicidad m del cero de $f(z) - f(z_0)$ tiene que ser 1, pues f es inyectivo. Así, $f'(z) \neq 0$ en $z \in A$.

$$\text{Así, } 1 = \frac{f(f^{-1}(z)) - f(f^{-1}(z_0))}{z - z_0} = \frac{f(f^{-1}(z)) - f(f^{-1}(z_0))}{f^{-1}(z) - f^{-1}(z_0)} \cdot \frac{f^{-1}(z) - f^{-1}(z_0)}{z - z_0}.$$

Como f^{-1} es continua, $\frac{f(f^{-1}(z)) - f(f^{-1}(z_0))}{f^{-1}(z) - f^{-1}(z_0)} \rightarrow f'(w_0)$, donde $w_0 = f^{-1}(z_0)$.

$$\therefore (f^{-1})'(z_0) \text{ existe y es igual a } \frac{1}{f'(f^{-1}(z_0))}. \quad \square$$

Singularidades

(77)

Def 29. $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tiene una singularidad aislada en $z_0 \in \mathbb{C}$, si f es holomorfa en $D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Se dice que es removible si hay $g: D_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa que coincide con f en $D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$.

Ejemplo. $f_1(z) = \frac{\sin z}{z}$ y $f_2(z) := \frac{1}{z}$ tienen a 0 como singularidad aislada.

La f_1 es removible, pues $f_1(z) = \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots\right)/z = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots$ que tiene radio de convergencia $R > 0$.

Si la de f_2 fuera removible, $\int_\gamma f_2 = 0$ con $\gamma(t) = \varepsilon \cdot e^{it}, t \in [0, 2\pi]$, lo cual no es posible.

Teo 45. Sea z_0 una singularidad aislada de f .

Es removible si y solo si $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = 0$.

Dem. ($\Rightarrow$) En este caso f sería continua, lo cual implica el límite.

($\Leftarrow$) Definamos $g(z) = \begin{cases} (z - z_0) f(z) & z \in A := D_r(z_0) \setminus \{z_0\} \\ 0 & z = z_0 \end{cases}$, para $r > 0$.

Luego, g es continua en $D := D_r(z_0)$ y holomorfa en A .

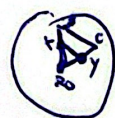
Caso I. Sea γ un polígono triangular en A tal que $I(\gamma, z_0) = 0$.



Entonces, como f es holomorfa en A , $\int_\gamma g = 0$.

Caso II Ahora $\gamma := [\bar{z}_0, b, c, z_0]$. Formamos $\gamma_1 = [\bar{x}, b, c, y, x]$ y $\gamma_2 = [z_0, x, y, z_0]$

con $x \in [\bar{z}_0, b]$ y $y \in [z_0, c]$. Así, $\int_\gamma g = \int_{\gamma_1} g + \int_{\gamma_2} g$.



Vemos que $\int_{\gamma_1} g = 0$. Como $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0$, podemos tomar x y y tal que

$|g(z)| < \varepsilon$ para $z \in \gamma_2$. Así $|\int_{\gamma_2} g| < \varepsilon \cdot \text{long}(\gamma_2)$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario $\int_{\gamma_2} g = 0$.

Caso III. Sea $\gamma = [a, b, c, a] \in A$ con $I(\gamma, z_0) \neq 0$. Formamos

$\gamma_1 = [a, b, z_0, a]$, $\gamma_2 = [b, c, z_0, b]$ y $\gamma_3 = [c, a, z_0, c]$. Así, $\int_\gamma g = \int_{\gamma_1} g + \int_{\gamma_2} g + \int_{\gamma_3} g$.

Por el caso II las tres son cero.

Por lo tanto, por el Teorema de Morera, g es holomorfa en D . (78)

Luego $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, pero como $g(z_0)=0$, $a_0=0$.

Entonces $\forall f(z) = \frac{g(z)}{z-z_0} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n}{z-z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-1}$ en D .

$\therefore z_0$ es removible.

Def 30. Sea a una singularidad aislada de $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa.

i) a es un polo si $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$.

ii) a es una singularidad esencial de f si no es removible y no es un polo.

Ejemplo. $\frac{1}{z}$ tiene un polo en 0 y $e^{1/z}$ tiene una singularidad esencial en 0, observe $z \neq \frac{1}{ni}$.

Prop 22. Sea a un polo de $f: A \rightarrow \mathbb{C}$. Entonces hay $m \in \mathbb{N}$ y $g: A \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que $(\forall z \in A, z \neq a) f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$. (*)

Dem. Como $\lim_{z \rightarrow a} (z-a) \frac{1}{f(z)} = 0$, por el Teo 45 a es una singularidad removible de $\frac{1}{f}$, podemos entonces suponer que $\frac{1}{f}$ es holomorfa en $B_r(a) \subset A$.

Luego, como a es un cero, hay $h: B_r(a) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y $m \in \mathbb{N}$ tal que

$\frac{1}{f} = h \cdot (z-a)^m$ en $B_r(a)$. Entonces $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$, donde $g(z) = \begin{cases} \frac{1}{h(z)} & z \in B_r(a) \\ (z-a)^m \frac{1}{f(z)} & z \notin B_r(a) \end{cases}$
y $h(a) \neq 0$ ($h \neq 0$ en $B_r(a)$).

Def 30. Al m se le llama el orden del polo.

Nota 12. Como $g \neq 0$ en $B_r(a)$, de (*) tenemos la representación en $B_r(a)$

$f(z) = \underbrace{\frac{a_0}{(z-z_0)^m} + \frac{a_1}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{a_m}{(z-z_0)}}_{\text{parte singular de } f} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{m+k} (z-z_0)^k$, con $a_0 \neq 0$.

Def 31. i) Sea $\{z_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$. Decimos que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} z_n$ es absolutamente convergente si $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ y $\sum_{k=1}^{\infty} z_{-k}$ lo son.

ii) $\{U_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ funciones complejo-valuedas, cada una $AC(\mathbb{C})$, tales que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} U_n(z)$ abs. conv.

Decimos que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} U_n(z)$ es uniformemente convergente en A si

$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(z)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} U_{-n}(z)$ convergen uniformemente en A .

~~Def 32~~ Def 32. Sea $a \in \mathbb{C}$ y $0 \leq r_1 < r_2 < \infty$.

Se define la región anular $Ann(a, r_1, r_2) := \{z : r_1 < |z-a| < r_2\}$.
(Desarrollo en series de Laurent)

Teo 46. Sea $A = Ann(a, r_1, r_2)$ y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa.

Entonces hay únicos $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ tales que

$(\forall z \in A) \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$, y la suma es abs. convergente para cada $z \in A$.

También, si $r_1 < \rho_1 \leq \rho_2 < r_2$, la suma es uniformemente convergente en $Ann(a, \rho_1, \rho_2)$.

Más aún, $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$, $n \in \mathbb{Z}$, donde $\gamma(t) = a + re^{2\pi i t}$, $t \in [0, 1]$, $r \in (r_1, r_2)$.

Dem. Sea $z_0 \in A$ arbitrario y ρ_1 y ρ_2 tales que $r_1 < \rho_1 < |z_0-a| < \rho_2 < r_2$.

Definamos las curvas $\gamma_1(t) = a + \rho_1 e^{2\pi i t}$ y $\gamma_2(t) = a + \rho_2 e^{2\pi i t}$, $t \in [0, 1]$.

Note que para $w \notin A$, $I(\gamma_1, w) = I(\gamma_2, w)$, entonces $\mathcal{D} := [-\gamma_1, \gamma_2] \sim 0$ c.r.a. A .

Por el Teo 40, $I(\mathcal{D}, z_0) = 1$

$I(\mathcal{D}, z_0) f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{D}} \frac{f(w)}{w-z_0} dw$, pero $I(\mathcal{D}, z_0) = I(\gamma_2, z_0) + I(-\gamma_1, z_0) = 1 + 0 = 1$

(80)

Entonces
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z_0} dw - \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z_0} dw \right\}.$$

Parte I

Por el Lema 6, las funciones

$$f_1(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} dw, \quad f_2(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

son holomorfas en $\mathbb{C} \setminus \gamma_1([0,1])$ y $\mathbb{C} \setminus \gamma_2([0,1])$, respectivamente.

Así, f_2 es holomorfa en $B_{r_2}(a)$, luego admite la expansión

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad \text{para } z \in B_{r_2}(a). \quad (*)$$

Sabemos que $a_n = \frac{f_2^{(n)}(a)}{n!}$ y por el Lema 6, $a_n = \frac{n!}{2\pi i} \underbrace{\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw}_{n!}, n=0,1,\dots$

Sea $\gamma_r(t) = a + re^{2\pi i t}$, $t \in [0,1]$, con $r \in (r_1, r_2)$.

Por el Teorema de Deformación, $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw = a_n$,

por lo que la serie en (*) es independiente de z_0 y su radio de convergencia es r_2 . Esto implica convergencia normal en $B_{r_2}(a)$ y

uniforme en $\overline{B_{r_2}(a)}$.

Parte II

Ahora definimos $h(z) := f_1\left(a + \frac{1}{z}\right)$ para $|z| < \frac{1}{r_1}$. Vemos que h es holomorfa en $B_{1/r_1}(0)$ y que 0 es una singularidad aislada.

Para $r > r_1$, definimos $C := \{w: |w-a|=r\}$, $d(z) := \text{dist}(z, C)$ y $M := \max_{\{z \in C\}} |f(z)|$.
Entonces, para z con $|z| > r$, por el Teorema de Deformación,

$$|f_1(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w-z} dw \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M \cdot 2\pi \cdot r}{d(z)}.$$

Con esto

(81)

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} |h(\xi)| = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left| f_1\left(a + \frac{1}{\xi}\right) \right| \leq \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{M \cdot r}{d\left(a + \frac{1}{\xi}\right)} \rightarrow 0.$$

Por lo que la singularidad es removible. $\therefore h$ es holomorfa en $B_{1/r_1}(0)$; y $h(0)=0$.

Entonces, hay $\hat{\rho}_1 > r_1$, tal que

$$h(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \xi^n \text{ en } B_{1/\hat{\rho}_1}(0). \quad (**)$$

$$\text{Luego } f_1(\xi) = f_1\left(a + \frac{1}{(\xi-a)^{-1}}\right) = h((\xi-a)^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (\xi-a)^{-n}. \quad (***)$$

Como la serie en (**) converge normalmente en $\overline{B_{1/\hat{\rho}_1}(0)}$, la serie en (***)

converge normalmente cuando $|\xi-a| \geq \hat{\rho}_1$. $\therefore$ hay convergencia uniforme de

Calculemos los coeficientes. Sabemos que

(*) y (**) cuando $\xi \in \text{Ann}(a, \hat{\rho}_1, \rho_2)$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta} \frac{h(z)}{z^{n+1}} dz, \text{ con } \beta(t) = \frac{1}{\hat{\rho}_1} \cdot e^{2\pi i t}, t \in [0,1].$$

Usando el cambio de variable $z = (w-a)^{-1}$, $dz = \frac{-dw}{(w-a)^2}$.

Y considerando $\gamma_1(t) = a + \hat{\rho}_1 e^{2\pi i t}$, $t \in [0,1]$, tenemos

$$\int_{\beta} \frac{h(z)}{z^{n+1}} dz = \int_{\beta} \frac{f_1\left(a + \frac{1}{z}\right)}{z^{n+1}} dz = \int_{-\gamma_1} \frac{f_1\left(a + \frac{1}{(w-a)^{-1}}\right)}{(w-a)^{-(n+1)}} \cdot \frac{-dw}{(w-a)^2} = \int_{\gamma_1} \frac{f_1(w)}{(w-a)^{n+1}} dw,$$

por lo que, para $n \geq 1$,

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta} \frac{h(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \left(f_1(w) + f_2(w) \right) (w-a)^{n-1} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} f(w) (w-a)^{n-1} dw.$$

$(n \in \mathbb{N}) a_{-n} := b_n$. La unicidad de $\{a_n\}$ es consecuencia de la unicidad en (*) y

Cor 18. Sea a una singularidad aislada de f , y

(82)

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ su expansión de Laurent en $\text{Ann}(a, r)$, $r > 0$.

Entonces, i) a es removible si y solo si $a_n = 0$, $n \leq -1$.

ii) a es polo si y solo si hay $m \geq 1$ tal que

$$a_m \neq 0 \text{ y } a_n = 0, n \leq -m.$$

iii) a es esencial si hay ^{una cantidad infinita} $n_1, n_2, \dots \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a_{n_i} \neq 0.$$

Nota 13. Para que a sea una singularidad esencial, $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)|$ no existe.

Entonces f oscila en $\mathbb{C}$ conforme $z \rightarrow a$. El Teorema de Picard dice

$(\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}) (\forall \delta > 0) (\exists w \in B_\delta(a)) f(w) = z$. Una versión más débil es el

Teo 47. (de Casarati-Weierstrass).

Sea a una singularidad esencial de f , y sea $z \in \mathbb{C}$ arbitrario.

Entonces, $(\forall \varepsilon > 0) (\exists w \in B_\delta(a)) |f(w) - z| < \varepsilon$.

Equivalentemente, hay $\{w_n\}$ tal que $w_n \rightarrow a$ y $f(w_n) \rightarrow z$.

O también $(\forall \delta > 0) f(\text{Ann}(a, \delta)) = \mathbb{C}$.

Dem. Supongamos que es falsa. Entonces, existe $z_0 \in \mathbb{C}$ y $\varepsilon > 0$, tal que

$(\forall w \in \text{Ann}(a, \delta)) |f(w) - z_0| \geq \varepsilon$ para cualquier $\delta > 0$.

Por lo tanto $\lim_{w \rightarrow a} \left| \frac{f(w) - z_0}{w - a} \right| = \infty$, luego $\frac{f(w) - z_0}{w - a}$ tiene un polo en a .

Sea $m \geq 1$ el orden del polo, i.e. $\frac{f(w) - z_0}{w - a} = \frac{g(z)}{(w - a)^m}$ con g holomorfa

en $B_\delta(a)$. Así $\lim_{w \rightarrow a} (w - a)^m (f(w) - z_0) = 0$.

Como $|(w - a)^m f(w)| \leq (w - a)^m (|f(w) - z_0| + |z_0|)$, $\lim_{w \rightarrow a} (w - a)^m f(w) = 0$

$\therefore (w - a)^m f(w)$ tiene una singularidad en a removible (Teo 45), también f tiene una singularidad removible en a .