

Def 32. Sea a una singularidad aislada de f .

83

Al coeficiente a_{-1} de la expansión de Laurent se le llama el residuo de f en a , denotado $\text{Res}(f, a)$.

Ya sabemos que $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$, para $\gamma(t) = a + re^{2\pi i t}$, ~~para~~ ^{para} r suficientemente pequeño.

Teo 48. (del residuo) Sea A abierto, $\{a_1, \dots, a_m\} \in A$ diferentes

y $f: A \setminus \{a_1, \dots, a_m\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa.

Si $\gamma: [0, 1] \rightarrow A \setminus \{a_1, \dots, a_m\}$ es cerrada, rectificable y $\gamma \cap \{a_1, \dots, a_m\} = \emptyset$, entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f = \sum_{k=1}^m I(\gamma, a_k) \cdot \text{Res}(f, a_k).$$

DCM. Sean $D_k := B_r(a_k)$, $k=1, \dots, m$. Tomemos $r > 0$ suficientemente pequeño para que

i) $\bar{D}_k \cap \bar{D}_j = \emptyset$, $k \neq j$.

ii) $\bar{D}_k \cap \gamma([0, 1]) = \emptyset$, $k=1, \dots, m$.

iii) $\text{Res}(f, a_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_k} f$, con $\beta_k(t) = a_k + r e^{2\pi i t}$, $t \in [0, 1]$.

Ahora, definamos $\gamma_k(t) = a_k + r \cdot e^{2\pi i m_k t}$, donde $m_k = I(\gamma, a_k)$.

Así el ciclo $\{-\gamma, -\gamma_1, \dots, -\gamma_m\} \sim 0$ c.r.a $A \setminus \{a_1, \dots, a_m\}$.

Luego, por el cor 16, $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f = \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} f$. Por iii) y la forma de γ_k

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f = m_k \cdot \text{Res}(f, a_k) = I(\gamma, a_k) \cdot \text{Res}(f, a_k). \quad \square$$

Prop 23. Si a es un polo de f de orden m , entonces

$$\text{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(a), \text{ donde } g(z) = (z-a)^m f(z).$$

Así, si $m=1$, $\text{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z).$

Ejercicio. Probar $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$

Sol. Sea $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$. f tiene 4 polos, los ceros de $1+z^4$:

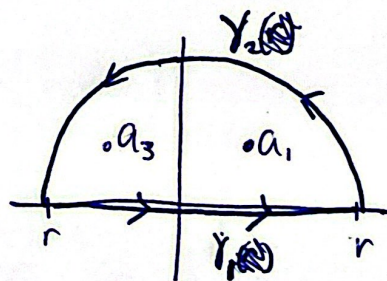
$$a_1 = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1}, a_2 = -\sqrt[4]{1}, a_3 = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1}, a_4 = -\sqrt[4]{1}. \quad (\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$$

$$\text{Así } \text{Res}(f, a_1) = \lim_{z \rightarrow a_1} (z-a_1) f(z) = \lim_{z \rightarrow a_1} \frac{(z-a_1) z^2}{\prod_{j=1}^4 (z-a_j)} = i(\sqrt[4]{1} + \sqrt[4]{1})(-\sqrt[4]{1} - i\sqrt[4]{1})(\sqrt[4]{1} + \sqrt[4]{1}) = \frac{1}{4\sqrt[4]{1}}.$$

Similarmente $\text{Res}(f, a_3) = \frac{1}{4i\sqrt[4]{1}}.$

Para $\gamma_r = (\gamma_1, \gamma_2)$

como en el diagrama:



$$\gamma_1(t) = t, t \in (-r, r)$$

$$\gamma_2(t) = r \cdot e^{it}, t \in (0, \pi)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f = I(\gamma_1, a_1) \text{Res}(f, a_1) + I(\gamma_2, a_3) \text{Res}(f, a_3) = \frac{-i}{2\sqrt{2}}.$$

Por otro lado $\int_{\gamma_r} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f = \int_{-r}^r \frac{t^2}{1+t^4} dt + \int_0^\pi \frac{r^2 e^{2it} \cdot r \cdot i \cdot e^{it} dt}{1+r^4 e^{4it}}$

Pero $\left| \frac{r^3 e^{3it}}{1+r^4 e^{4it}} \right| \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$ $\therefore \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \frac{t^2}{1+t^4} dt = 2\pi i \left(\frac{-i}{2\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$

Prop 24. Sea $A \subset \mathbb{C}$ abierto que contenga a $H := \{z: \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$. (85)

Sean $a_1, \dots, a_m \in A \setminus \mathbb{R}$.

i) Supongamos que $f: A \setminus \{a_1, \dots, a_m\} \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y

que hay $M, r > 0$ y $p > 1$ tal que $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^p}$ para $z \in H$ con $|z| \geq r$.

Entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \cdot \sum_{a_n \in H} \operatorname{Res}(f, a_n)$.

ii) Cambiando H por $L = \{z: \operatorname{Im}(z) \leq 0\}$ se tiene $\int_{-\infty}^{\infty} f = -2\pi i \sum_{a_n \in L}$.

iii) Si $f = \frac{p}{q}$, con p y q ^{sinceros en $\mathbb{R}$} polinomios tal que $\operatorname{grado}(q) \geq \operatorname{grado}(p) + 2$, entonces se tiene i) y ii).

Dem. i) Sea $\gamma(t) = r \cdot e^{it}$, $t \in [0, \pi]$ y $\gamma_r = [-r, r]$ y $\gamma_r = \{\gamma_1, \gamma_2\}$.

Por el Teo 48 $\int_{\gamma_r} f = 2\pi i \sum_{a_n \in H} \operatorname{Res}(f, a_n)$.

Pero $\int_{\gamma_r} f = \int_{-r}^r f(x) dx + \int_0^\pi f(re^{it}) ir \cdot e^{it} dt$.

Usando la hipótesis $|\int_0^\pi f(re^{it}) ir \cdot e^{it} dt| \leq \pi \cdot \frac{M}{r^p} \cdot r = \frac{\pi \cdot M}{r^{p-1}} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$.

Similarmente ii).

iii) Para z grande $|\frac{p(z)}{q(z)}| \leq c \cdot \frac{|z|^p}{|z|^q} \leq c \cdot \frac{1}{|z|^2}$.

Prop 25. Con las condiciones de la Prop 24, pero
 con $\lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ z \in H}} |f(z)| = 0$, tenemos que

(86)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx = 2\pi i \sum_{a_n \in H} \operatorname{Res}(e^{itz} f(z), a_n).$$

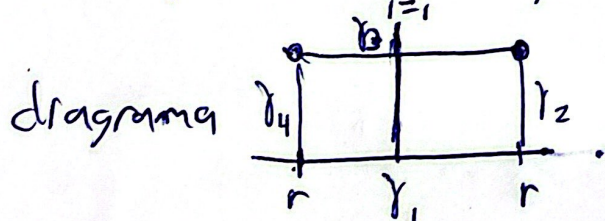
También se tiene para el caso ii) y iii).

Dem i) Sea $r > 0$ y $z_1 = -r$, $z_2 = r$, $z_3 = r + ir$, $z_4 = -r + ir$.

Defina $\gamma = [z_1, z_2, z_3, z_4, z_1]$. Por el Tco 48, con r grande

$$\int_{\gamma} e^{itz} f(z) dz = 2\pi i \sum_{a_n \in H} \operatorname{Res}(e^{itz} f(z), a_n).$$

Pero $\int_{\gamma} e^{itz} f(z) dz = \sum_{i=1}^4 I_i$, donde $I_i = \int_{\gamma_i}$ y γ_i son como en el



$$\begin{aligned} \text{Para } \varepsilon > 0 \text{ arbitrario } |I_2| &= \left| \int_0^r e^{it\gamma_2(s)} f(\gamma_2(s)) \gamma_2'(s) ds \right| = \left| \int_0^r e^{itr} e^{-ts} f(\gamma_2(s)) i ds \right| \\ &\leq \left| \varepsilon \int_0^r e^{-ts} ds \right| = \frac{\varepsilon}{t} (1 - e^{-tr}) \leq \frac{\varepsilon}{t} \therefore |I_2| = 0. \end{aligned}$$

Igual para I_4 .

$$\text{Para } I_3, |I_3| = \left| \int_{-r}^r e^{it(s+ir)} f(\gamma_3(s)) ds \right| \leq \varepsilon \cdot \int_{-r}^r e^{-tr} ds = 2\varepsilon r e^{-tr} \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} 0.$$

$$\text{Y vemos que } I_1 = \int_{-r}^r e^{its} f(s) ds.$$

Ejercicio. Sea $b > 0$.
$$I = \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi \cdot e^{-b}}{2b}.$$

(87)

Ver que $2I = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x^2 + b^2} dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x + i \sin x}{x^2 + b^2} dx.$

Ejemplo. Calcular $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a^2 - 2a \cos \theta}$, con $a > 0$ y $a \neq 1$.

Sol. $I = \int_{\gamma} \frac{dz}{1 + a^2 - \frac{2a}{z}(z + \frac{1}{z})} i z = \int_{\gamma} f(z) dz$, donde $f(z) = \frac{i}{(z-a)(az-1)}.$

$\gamma(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi].$

Como los polos de f son a y $\frac{1}{a}$,

~~Máx~~
$$Res(f, a) = \begin{cases} \frac{i}{a^2 - 1} & a < 1 \\ \frac{i}{1 - a^2} & a > 1 \end{cases} \quad \therefore I = \begin{cases} \frac{2\pi}{1 - a^2} & a < 1 \\ \frac{2\pi}{a^2 - 1} & a > 1 \end{cases}.$$

Más general

Prop 26. Sea $R(z) = R(x, y) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, Q sin ceros en $\{|z|=1\}$.

Entonces $I = \int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = 2\pi i \sum Res(f, a_k)$

donde a_k son los polos de $f(z) = \frac{R(\frac{1}{z}(z + \frac{1}{z}), \frac{1}{z}(z - \frac{1}{z}))}{i z}.$

Dem. $I = \int_{\gamma} f.$

Teo 49. (Principio del argumento)

(88)

Sea $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ meromorfa (i.e. holomorfa con polos) con polos

$p_1, \dots, p_n$ y ceros $a_1, \dots, a_m$; y $g: A \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa.

Sea γ c.r. en A que no toca ni polos ni ceros.

Entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^m g(a_k) \cdot I(\gamma, a_k) - \sum_{k=1}^n g(p_k) \cdot I(\gamma, p_k)$$