

Topología en $\mathbb{C}$.

(5)

Def 5. Una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ converge a $z \in \mathbb{C}$ si $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N}) |z_n - z| < \varepsilon$ para $n \geq N$, denotado $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$.

Se dice que $\{z_n\}$ es de Cauchy si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n, m \geq N) |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

Teo 1. Si $\{z_n\}$ y $\{w_n\}$ son sucesiones de Cauchy en $\mathbb{C}$, entonces

i) $\{z_n + v \cdot w_n\}$ es de Cauchy por cualquier $v \in \mathbb{C}$.

ii) $\{\bar{z}_n\}$ es de Cauchy.

iii) $\{|z_n|\}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$.

Dem. i) Es claro si $v = 0$. Supongamos que $v \neq 0$.

Dado $\varepsilon > 0$, sea N_1 tal que $|z_n - z_m| < \varepsilon/2$ para $n, m \geq N_1$,
y sea N_2 tal que $|w_n - w_m| < \frac{\varepsilon}{2|v|}$ para $n, m \geq N_2$.

Así, si $n, m \geq \max(N_1, N_2)$ se tiene que

$$\begin{aligned} |(z_n + v w_n) - (z_m + v w_m)| &\leq |z_n - z_m| + |v| \cdot |w_n - w_m| \\ &\leq \varepsilon/2 + \frac{\varepsilon}{2|v|} \cdot |v| = \varepsilon. \end{aligned}$$

ii) Surge porque $|\bar{z}_n - \bar{z}_m| = |\overline{z_n - z_m}| = |z_n - z_m|$.

iii) Surge porque $||z_n| - |z_m|| \leq |z_n - z_m|$.

Corolario 2. $\{z_n\}$ es de Cauchy en $\mathbb{C}$ si y solo si $\{R(z_n)\}$ y $\{I(z_n)\}$ son de Cauchy en $\mathbb{R}$.

Dem. ($\Rightarrow$) Surge porque $R(z_n) = \frac{z_n + \bar{z}_n}{2}$ y $I(z_n) = \frac{z_n - \bar{z}_n}{2i}$.

($\Leftarrow$) Surge de $|z_n - z_m| \leq |R(z_n - z_m)| + |I(z_n - z_m)| = |R(z_n) - R(z_m)| + |I(z_n) - I(z_m)|$.

Cor 3. $(\mathbb{C}, d(z, w))$, con $d(z, w) = |z - w|$, es un espacio métrico completo, luego un espacio topológico.

Def 6. i) Un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ es acotado si el conjunto $\{|z| : z \in A\}$ es acotado en $\mathbb{R}$ ($\exists M : |z| < M$ para todo $z \in A$).

ii) Define las bolas $B_r(z) := \{w \in \mathbb{C} : d(z, w) < r\}$.

iii) Un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ es totalmente acotado si para todo $\epsilon > 0$, A puede ser cubierto con una cantidad finita de bolas de radio ϵ .

Prop 2. Un subconjunto $A \subset \mathbb{C}$ es acotado si y solo si existe $z \in \mathbb{C}$ y $r > 0$ tal que $A \subset B_r(z)$.

Def 7. i) Un conjunto A en un espacio métrico es compacto si toda cubierta abierta de A tiene una subcubierta finita.

ii) A es secuencialmente compacto si toda sucesión en A tiene una subsucesión convergente en A .

iii) Un punto z en un espacio métrico es un punto de acumulación (o punto límite) de A , si $(\forall \epsilon > 0) A \cap B_\epsilon(z) \setminus \{z\} \neq \emptyset$.

Si $z \in A$ y no se cumple lo anterior, z es un punto aislado de A .

Teo 2. Sea A un subconjunto de un espacio métrico.

Las siguientes son equivalentes.

i) A es compacto.

ii) Todo subconjunto infinito de A tiene punto límite en A .

iii) A es secuencialmente compacto.

iv) A es completo y totalmente acotado.

Dem. (i) $\Rightarrow$ ii). Supongamos que no se cumple ii). Entonces hay

(7)

$S := \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ colección de puntos diferentes en A tal que

$$(\forall x_n \in S) (\exists \varepsilon_n > 0) A \cap B_{\varepsilon_n}(x_n) \setminus \{x_n\} = \emptyset.$$

Así, $\{B_{\varepsilon_n}(x_n)\}_{n=1}^{\infty}, S^c\}$ es una cubierta abierta de A de la cual no podemos extraer una subcubierta finita de A , lo cual contradice la compacidad de A .

(ii) $\Rightarrow$ iii) Sea $S := \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión de puntos en A , todos diferentes.

Al ser S infinito, tiene punto límite $y \in A$. Así, $(\forall n \geq 1) S \cap B_{1/n}(y) \neq \emptyset$.

Luego, hay $x_{n_k} \in S$ tal que $(\forall k \geq 1) |x_{n_k} - y| < 1/k$, por lo que S es secuencialmente compacto.

(iii) $\Rightarrow$ iv) Sea $S := \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ~~CA~~ ^{CA} de Cauchy. Por la hipótesis podemos tomar subsucesión convergente en A , lo cual implica que S también es convergente en A . $\therefore A$ es completo.

Ahora sea $\varepsilon > 0$ fijo. Tomemos $x_1 \in A$. Si $A \not\subset B_{\varepsilon}(x_1)$, tomemos $x_2 \in A \setminus B_{\varepsilon}(x_1)$. Si $A \not\subset B_{\varepsilon}(x_1) \cup B_{\varepsilon}(x_2)$, tomemos $x_3 \in A \setminus (B_{\varepsilon}(x_1) \cup B_{\varepsilon}(x_2))$. Si este proceso no termina, tendríamos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ para todo n, m . Luego, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no tendría subsucesión convergente, por lo tanto este proceso debe terminar de manera finita para cualquier $\varepsilon > 0$. $\therefore A$ es totalmente acotado.

(iv) $\Rightarrow$ i). Supongamos que A no es compacto, entonces existe una cubierta F de A que no admite subcubierta finita. Definir $\varepsilon_n = \frac{1}{2^n}$. Como A es totalmente acotado, hay una cantidad finita de bolas de radio ε_n que cubren A .

Entonces por alguna de estas bolas, digamos $B_{\epsilon_1}(y_1)$, el conjunto $A_1 := A \cap B_{\epsilon_1}(y_1)$ tampoco tiene subcubierta finita de $\mathcal{F}$. ⑧

Tomemos $x_1 \in A_1$.

Con el mismo razonamiento, como A_1 se cubre con una cantidad finita de bolas de radio ϵ_2 y A_1 no tiene subcubierta finita de $\mathcal{F}$, para alguna de las bolas, digamos $B_{\epsilon_2}(y_2)$, $A_2 := A_1 \cap B_{\epsilon_2}(y_2)$ tampoco tiene subcubierta finita de $\mathcal{F}$. Tomemos $x_2 \in A_2$.

Continuando con este proceso tenemos $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ de la forma $A_n := A_{n-1} \cap B_{\epsilon_n}(y_n)$ que no admiten subcubierta finita de $\mathcal{F}$.

También tenemos (x_n) de Cauchy, pues $d(x_n, x_{n+m}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + \dots + d(x_{n+m-1}, x_{n+m}) < \frac{1}{2^{n-1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+m-1}} \leq \frac{1}{2^n}$. Como A es completo,

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in A$. Pero hay abierto $U \in \mathcal{F}$ tal que $x \in U$, luego existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset U$. Por la convergencia $x_n \rightarrow x$ y $\epsilon_n \rightarrow 0$, hay n tal que $B_{\epsilon_n}(x_n) \subset B_\delta(x) \subset U$.

Más aún, como $x_n \in B_{\epsilon_n}(y_n)$, podemos escoger n tal que

$B_{\epsilon_n}(y_n) \subset B_\delta(x) \subset U \therefore A_n \subset U$, lo cual contradice que no hay subcubierta finita de $\mathcal{F}$ para A_n . ■

Cor 4. (Heine-Borel) En $\mathbb{C}$, un conjunto es compacto si y solo si es cerrado y acotado.

La demostración es consecuencia del teorema anterior y del hecho que un conjunto es cerrado si y solo si tiene todos sus puntos límites.