

Def: Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$.

La topología relativa de A es la colección $\tau_A := \{A \cap U : U \in \tau\}$,

y un elemento de τ_A se llama abierto relativo a A .

ii) En un espacio métrico, un conjunto A es conectado si no se puede representar como la unión disjunta de dos abiertos relativos a A .

iii) En $\mathbb{C}$, Un polígono es el conjunto $[z_1, z_2, \dots, z_n] = \{z \in \mathbb{C} : z = t z_n + (1-t) z_{n-1}, \dots, t z_2 + (1-t) z_1, t \in [0,1]\}$ donde $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$.

Teo.3 Un conjunto abierto $A \subset \mathbb{C}$ es conectado si y solo si cualquier par de puntos en A pueden ser unidos por un polígono contenido en A .

Dem. ($\Rightarrow$) Tome $a \in A$. Sea A_1 el conjunto de puntos de A que pueden ser unidos con a mediante un polígono y A_2 los que no se pueden unir con a . Así que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Ahora tomemos $a_1 \in A_1$ y $\epsilon_1 > 0$ tal que $B_{\epsilon_1}(a_1) \subset A$. Un punto arbitrario $z \in B_{\epsilon_1}(a_1)$ podemos unirlo con a_1 mediante $t \cdot z + (1-t) a_1$, y como a_1 se puede unir con a , entonces $z \in A_1$, luego $B_{\epsilon_1}(a_1) \subset A_1$, $\therefore A_1$ es abierto.

Ahora tomemos $a_2 \in A_2$ y $B_{\epsilon_2}(a_2) \subset A$ para algún $\epsilon_2 > 0$. Si algún punto de $B_{\epsilon_2}(a_2)$ se pudiera unir con a mediante un polígono, entonces podríamos unir a_2 con a , lo cual no es cierto por la definición de A_2 , luego $B_{\epsilon_2}(a_2) \subset A_2 \therefore A_2$ es abierto.

sin embargo, como A es conectado, la única opción es que $A_2 = \emptyset$.

$\therefore A = A_1$.

(9)

($\Leftarrow$) Supongamos que A no es conectedo, entonces hay dos abiertos O_1 y O_2 no vacíos tal que $A = \cancel{O_1 \cup O_2} (O_1 \cap A) \cup (O_2 \cap A) = A_1 \cup A_2$. Como cualquier punto de A_1 se puede unir con un punto de A_2 mediante un polígono, podemos encontrar $a_1 \in A_1$ y $a_2 \in A_2$ tales que el conjunto $\{t \cdot a_1 + (1-t)a_2 : t \in [0,1]\}$ es la unión de dos conjuntos abiertos ^{disjuntos} no-vacíos, lo cual no es posible. $\therefore A$ es conectedo. $\square$

Cor 5: Sea abierto y conectedo. Si $z, w \in A$, existe un polígono que une a z y w , y tal que los lados del polígono son paralelos a los ejes coordenados.

Def 7. Una componente de un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ es un conjunto conectedo máximo contenido en A , i.e. sea $C \subset A$ una componente, entonces $(\forall x \in A \setminus C) (C \cup \{x\})$ no es conectedo.

Lemma 1. Sean $\{D_j, j \in I\}$ una colección de conjuntos en $\mathbb{C}$ conectedos con intersección no vacía. Entonces, $D := \bigcup_{j \in I} D_j$ es conectedo.

Dem. Sea $x \in \bigcap_{j \in I} D_j$. Supongamos que D no es conectedo, entonces hay O_1 y $O_2 \subset \mathbb{C}$ abiertos disjuntos no vacíos tales que

$D = (O_1 \cap D) \cup (O_2 \cap D)$. Así, $D_1 \subset O_1$ o $D_1 \subset O_2$; digamos que

$D_1 \subset O_1$, por lo que $x \in O_1$. Pero $\exists$ algún otro $D_k \subset O_2$, lo cual contradice que $x \in D_k$, pues $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. $\square$

Teo 4: Todo $A \subset \mathbb{C}$ se escribe como unión de componentes disjuntas.

(11)

Dem. Sea $z \in A$ y $D(z)$ la unión de todos los subconjuntos ^{de A} ~~de A~~ conexos que contienen a z . Por el lema anterior, $D(z)$ es conexo. Veamos que $D(z)$ es maximal. Tomemos $C \subset A$ conexo tal que $C \cap D(z) \neq \emptyset$ y sea $z_1 \in C \cap D(z)$. Luego $C \subset D(z_1)$. Notemos que $D(z) \subset D(z_1)$, pues $D(z)$ es conexo y contiene a z_1 , por lo que $z \in D(z_1)$. Pero por el lema, $D(z_1)$ es conexo, entonces $D(z_1) \subset D(z) \therefore D(z_1) = D(z) \therefore C \subset D(z)$. Se sigue que cualquier otra componente de A es ajena a $D(z)$. $\square$

Teo 5. Sea $A \subset \mathbb{C}$ abierto. Entonces la descomposición de A en componentes es a lo más numerable.

Dem. Sea C una componente de A y sea $z \in C$. Como A es abierto, $B_\epsilon(z) \subset A$ para algún $\epsilon > 0$. Por el lema anterior $B_\epsilon(z) \cup C$ es conexo, y como C es maximal $B_\epsilon(z) \subset C \therefore C$ es abierto. Ahora, sea $S = \{x + iy \in A : x, y \in \mathbb{Q}\}$. Como cada $z \in S$ está en alguna componente de A , entonces hay a lo más una cantidad numerable de componentes. $\square$