

Def 8. Una función $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es continua en z_0 si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) |z_0 - z| < \delta \Rightarrow |f(z_0) - f(z)| < \varepsilon.$$

(12)

Denotado $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$. Decimos que f es continua en un abierto

$A \subset \mathbb{C}$ si f es continua en cada punto de A .

Nota 3. Toda $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se puede ver como dos funciones
 $u, v: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $f(z) = u(z) + i v(z)$.

Prop 3. Sean $f, g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continuas en z_0 . Entonces

i) $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) + g(z)) = f(z_0) + g(z_0)$

ii) $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \cdot g(z)) = f(z_0) \cdot g(z_0)$

iii) Si $g(z_0) \neq 0$, $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_0)}{g(z_0)}$

iv) $\lim_{z \rightarrow z_0} |f|(z) = |\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)|$

v) $\lim_{z \rightarrow z_0} \overline{f(z)} = \overline{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}$

Cor 5 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f(z_0) \text{ y } \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} f(z_0)$.

Teo 6. Sea $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continua.

i) Si $A \subset \mathbb{C}$ es abierto (cerrado), $f(A)$ es abierto (cerrado).

ii) Si $A \subset \mathbb{C}$ es compacto, $f(A)$ es compacto.

iii) Si $A \subset \mathbb{C}$ es conexo, $f(A)$ es conexo.

(13)

Dem. ii) Sea $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset f(A)$. Así, hay $\{x_n\} \in A$ con $f(x_n) = y_n$.

Como A es compacto, hay $x_{n(k)}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n(k)} = z \in A$.

Como f es continua, $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n(k)}) = f(z) \in f(A)$.

iii) Si $f(A) = (f(A) \cap O_1) \cup (f(A) \cap O_2)$ con O_1 y O_2 abiertos y disjuntos no nulos, entonces $A = (A \cap \bar{f}^{-1}(O_1)) \cup (A \cap \bar{f}^{-1}(O_2))$.

Por i), $\bar{f}^{-1}(O_1)$ y $\bar{f}^{-1}(O_2)$ son abiertos y disjuntos no nulos, lo cual contradice que A es conexo.

Teo 7. Si $A \subset \mathbb{C}$ es compacto y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ continua, entonces f es uniformemente continua en A .

Dem. Sea $\epsilon > 0$. Por la continuidad $(\forall z \in A)(\exists \delta_z > 0)$
 $|w - z| < \delta_z \Rightarrow |f(w) - f(z)| < \epsilon/2$.

Como $\{B_{\delta_z/2}(z)\}_{z \in A}$ es una cubierta abierta de A ,

hay subcubierta finita $\{B_{\delta_k}(z_k)\}_{k=1}^n$, con $\delta_k := \delta_{z_k}$.

Defin $\delta := \min(\frac{\delta_1}{2}, \dots, \frac{\delta_n}{2})$. Si $|z - w| < \delta$, como existe k tal que $z, w \in B_{\delta_k}(z_k)$, entonces ~~entonces~~,

de $|z - w| \leq |z - z_k| + |w - z_k|$, surge $|f(z) - f(w)| < \epsilon$.

Def 9. Sean $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y f funciones $\mathbb{C}$ -valuadas con dominio $A \subset \mathbb{C}$.

(14)

- i) Definimos que f_n converge a f ($f_n \rightarrow f$) si $(\forall z \in A) f_n(z) \rightarrow f(z)$.
- ii) Se dice que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente de Cauchy en A si
- $$(\forall \epsilon > 0) (\exists N) (\forall z \in A) n, m \geq N \Rightarrow |f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon.$$
- iii) $\{f_n\}$ converge uniformemente a f si
- $$(\forall \epsilon > 0) (\exists N) (\forall z \in A) n \geq N \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \epsilon.$$

Teo 8. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una suc. de funciones $\mathbb{C}$ -valuadas con dominio $A \subset \mathbb{C}$ abierto. Si $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy en A y cada f_n es continua, entonces $f(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$ es continua en A y $f_n \rightarrow f$ uniformemente.

Dem Como $\{f_n(z)\}$ es de Cauchy para cada $z \in A$, $f(z)$ existe.

Dem. Sea $\epsilon > 0$. Tenemos que $|f(z) - f(w)| \leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(w)| + |f_n(w) - f(w)|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $z, w \in A$.

Por la convergencia uniforme de Cauchy, hay N tal que $n \geq N$

$$\Rightarrow |f_n(z) - f_n(w)| < \epsilon/3 \quad \text{y} \quad |f_n(z) - f(z)| < \epsilon/3 \quad \text{y} \quad |f_n(w) - f(w)| < \epsilon/3.$$

Tomando $n \rightarrow \infty$ tenemos $|f(z) - f_n(z)| < \epsilon/3$ y $|f_n(w) - f(w)| < \epsilon/3$.

Ahora, como f_n es continua, hay $\delta > 0$ tal que

$$|w - z| < \delta \Rightarrow |f_n(z) - f_n(w)| < \epsilon/3.$$

Juntado lo anterior, si $|w - z| < \delta$, entonces $|f(z) - f(w)| \leq \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$,
 $\therefore f$ es continua en $z \in A$.

Para ver que $f_n \rightarrow f$ uniformemente, bastará con que

$$|f(z) - f_n(z)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_m(z) - f_n(z)|.$$