

Prop 4. Sean $f, g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

(15)

i) Si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ y $\lim_{z \rightarrow w_0} g(z) = w_1$, entonces $\lim_{z \rightarrow z_0} g(f(z)) = w_1$.

ii) Si f es continua en un abierto $A \subset \mathbb{C}$ y g es continua en $f(A)$, entonces $g \circ f$ es continua en A .

Serie de Potencia

Def 10. Sean $\{f_n\}$ funciones ~~complejas~~ $\mathbb{C}$ -valuedas con dominio $A \subset \mathbb{C}$.

i) Definimos que $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ es convergente en $w \in A$ si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k(w)$ existe.

ii) Definimos que $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ es absolutamente convergente en $w \in A$,

si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |f_k(w)|$ existe en $\mathbb{R}$.

iii) Definimos que $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ es convergente uniformemente en A ,

si $\left\{ \sum_{k=1}^n f_k(z) \right\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en A .

iv) Se dice que $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ converge normalmente en $B \subset A$ si

existe $\{M_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ con $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ y tal que

$(\forall z \in B) (\forall n \in \mathbb{N}) |f_n(z)| \leq M_n$.

v) Finalmente, la serie diverge en $w \in A$, si $\left\{ \sum_{k=1}^n f_k(w) \right\}_{n=1}^{\infty}$ no converge.

Prop 5. i) Convergencia absoluta implica que la serie es convergente.

ii) Si $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ es convergente en $w \in A$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(w) = 0$
 $\vee \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} f_k(w) = 0$.

Teo 9. (La prueba M de Weierstrass)

(16)

Convergencia normal de una serie en $B \subset \mathbb{C}$ implica convergencia uniforme en B y absolutamente en cada $w \in B$.

Dem. Definimos $S_n(z) := \sum_{k=1}^n f_k(z)$. Así, para $m > n$

$$(\forall z \in B) |S_m(z) - S_n(z)| = \left| \sum_{k=n+1}^m f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^m M_k.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} M_k = 0$, dado $\varepsilon > 0$, hay N tal que

$$(\forall z \in B) \quad m > n \geq N \Rightarrow |S_m(z) - S_n(z)| < \varepsilon.$$

Luego, $\{S_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy uniformemente

$\therefore$ la serie es uniformemente ~~de Cauchy~~ convergente.

$$\text{Similarmnte, vemos que } (\forall z \in B) \left| \sum_{k=1}^m |f_k(z)| - \sum_{k=1}^n |f_k(z)| \right| \leq \sum_{k=n+1}^m M_k,$$

luego $\left\{ \sum_{k=1}^n |f_k(z)| \right\}_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente de Cauchy

$\therefore$ La serie es absolutamente convergente de manera uniforme en B .

Def 11. i) Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. La serie de potencias asociada a $\{a_n\}$ es $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot z^n$

ii) El radio de convergencia de una serie de potencias es

$$\rho = \sup \{ r \geq 0 : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n < \infty \}.$$

Al conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho\}$ se le llama disco de convergencia.

(17)

Lema 2 (de Abel - Weierstrass). Sea $0 < r < r_0$ y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$.

Supongamos que existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $(\forall n \geq 1) |a_n \cdot r_0^n| \leq M$.

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot z^n$ converge normalmente para $|z| \leq r$.

En particular converge uniformemente en $\{z: |z| \leq r\}$.

Dem. Para z con $|z| \leq r$, tenemos $|a_n \cdot z^n| \leq |a_n| \cdot |z|^n \leq |a_n| \left(\frac{r}{r_0}\right)^n r_0^n$

$\leq M \cdot \left(\frac{r}{r_0}\right)^n$. Como $\left|\frac{r}{r_0}\right| < 1$, se tiene la convergencia normal por

con $M_n := M \left(\frac{r}{r_0}\right)^n$, de manera uniforme en $\{z: |z| \leq r\}$.

Teo 1. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot z^n$ con radio de convergencia ρ .

i) Si $0 < r < \rho$, entonces la serie converge normalmente en $\{z: |z| \leq r\}$.

ii) La serie diverge en $\{z: |z| > \rho\}$.

Dem. i) Sea r_0 tal que $r < r_0 < \rho$, entonces, por hipótesis

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r_0^n < \infty$, luego existe $M > 0$ tal que $(\forall n) |a_n| r_0^n \leq M$.

Luego, por el Lema de Abel-Weierstrass se sigue el resultado.

ii) Sea $w \in \{z: |z| > \rho\}$. Supongamos que $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot w^n\right| < \infty$, entonces por la Proposición 5,

$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n \cdot w^n| = 0$, luego hay $M > 0$ tal que

$|a_n| \cdot |w|^n \leq M$. Por el Lema anterior, podemos tomar r tal que

$\rho < r < |w|$ y tal que $\sum a_n z^n$ es convergente en $\{z: |z| < r\}$, contradiciendo la definición de ρ .

Corolario 6. Si $\sum a_n z^n$ tiene radio de convergencia ρ ,
entonces $S(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ es continua en $\{z: |z| < \rho\}$. (18)

Nota 4 (Recordatorio). Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ en $\mathbb{R}$.

i) $\liminf x_n \leq \limsup x_n$

ii) $\liminf (-x_n) = -\limsup x_n$

iii) Para $r > 0$, $\liminf (r x_n) = r \cdot \liminf (x_n)$ y $\limsup (r x_n) = r \cdot \limsup x_n$.

iv) Si $(\forall n) x_n \leq y_n$, entonces $\liminf x_n \leq \liminf y_n$ y
 $\limsup x_n \leq \limsup y_n$.

v) $\lim x_n = x \Leftrightarrow x = \liminf x_n = x = \limsup x_n$.

vi) $\liminf (x_n + y_n) \geq \liminf x_n + \liminf y_n$ y
 $\limsup (x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$.

vii) Si $x_n, y_n \geq 0$, y $\limsup x_n < \infty$ y $\limsup y_n < \infty$,
entonces $\limsup (x_n y_n) \leq \limsup x_n \cdot \limsup y_n$.
Se tiene la igualdad si una converge.

Prop. Sea $x_n > 0$. i) Si $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, entonces $\sum x_n$ converge
(criterio del radio)

ii) $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1 \Rightarrow \sum x_n$ diverge.

Prop. (criterio de la raíz). Sea $x_n > 0$,

i) $\limsup (x_n)^{1/n} < 1 \Rightarrow \sum x_n < \infty$.

ii) $\limsup (x_n)^{1/n} > 1 \Rightarrow \sum x_n$ diverge.

Teo 11. Sea $\sum a_n \cdot z^n$ con $a_n \neq 0$ para todo n .

(19)

Si $\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L < \infty$, entonces el radio de convergencia

es $\rho = 1/L$. Dem. Para todo $r < \frac{1}{L}$ se tiene

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{r^{n+1}}{r^n} \right| = r \cdot \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \frac{1}{L} \cdot L = 1; \text{ por el criterio}$$

del radio $\sum |a_n| \cdot r^n < \infty$. $\square$

Teo 12 (de Hadamard) El radio de convergencia ρ de $\sum a_n z^n$ satisface: $\frac{1}{\rho} = \limsup (|a_n|^{1/n})$.

Dem. Sea $L := \limsup |a_n|^{1/n}$. De iii) en la Nota 4,

~~sea~~ $\limsup |a_n r^n|^{1/n} = r \cdot L$. Luego, por el criterio de la raíz,

$$(\forall r < \frac{1}{L}) \left| \sum |a_n| \cdot r^n \right| < \infty \therefore \rho = \frac{1}{L}.$$

Prop 6. Sean $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ absolutamente convergentes,

$$\text{Defina } w_n := \sum_{i=0}^n u_i \cdot v_{n-i}.$$

Entonces, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ es absolutamente convergente,

$$\text{además } \sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum u_i \right) \cdot \left(\sum v_i \right).$$

Dem. Sean $a_n := \sum_{i=0}^{\infty} |u_i|$ y $b_n := \sum_{i=0}^{\infty} |v_i|$, entonces $\lim a_n = \lim b_n = 0$.

Como $\sum_{n=0}^N |w_n| \leq \left(\sum_{n=0}^N |u_n| \right) \left(\sum_{n=0}^N |v_n| \right) \leq a_0 \cdot b_0 < \infty$ para todo $N \geq 0$,

la serie $\sum w_n$ es absolutamente convergente.

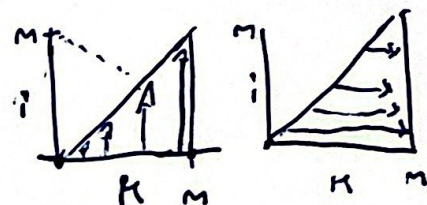
Ahora, sea $M \geq 2n$ y $L_n = \left| \sum_{k=0}^M W_k - \left(\sum_{k=0}^n U_k \right) \left(\sum_{k=0}^n V_k \right) \right|$.

(20)

Veamos que $L_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Tenemos que $L_n = \left| \sum_{k=0}^M \sum_{i=0}^k U_i V_{k-i} - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n U_i V_j \right|$, pero

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^M \sum_{i=0}^k U_i V_{k-i} &= \sum_{i=0}^M \sum_{k=i}^M U_i V_{k-i} \\ &= \sum_{i=0}^M U_i \sum_{k=i}^M V_{k-i} = \sum_{i=0}^M U_i \sum_{j=0}^{M-i} V_j = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^{M-i} U_i V_j. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{Así } L_n &= \left| \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^{M-i} U_i V_j - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n U_i V_j \right| \\ &= \left| \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^{M-i} U_i V_j - \sum_{j=0}^n U_i V_j \right) + \sum_{i=n+1}^M \sum_{j=0}^{M-i} U_i V_j \right| \\ &= \left| \sum_{i=0}^n \sum_{j=n+1}^{M-i} U_i V_j + \sum_{i=n+1}^M \sum_{j=0}^{M-i} U_i V_j \right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=n+1}^{\infty} |U_i| \cdot |V_j| + \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |U_i| \cdot |V_j| \\ &= a_0 \cdot b_{n+1} + b_0 \cdot a_{n+1} \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Teo 13. Suponga que $\sum a_n z^n$ y $\sum b_n z^n$ tienen ambas radio de convergencia ~~mayor~~ mayor a ρ . Entonces

i) las series $\sum (a_n + b_n) z^n$ y $\sum C_n z^n$ tiene radio de convergencia mayor a ρ , donde $C_n = \sum_{i=0}^n a_i \cdot b_{n-i} = (a * b)(n)$.

ii) Para $|z| < \rho$, tenemos que $\sum (a_n + b_n) z^n = \sum a_n z^n + \sum b_n z^n$
y $\sum C_n z^n = \left(\sum a_n z^n \right) \left(\sum b_n z^n \right)$.

Teo 14. (límite de Abel) Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. (21)

Suponga que $a := \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente y que $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ tiene radio de convergencia $\rho = 1$.

Entonces, si $z \rightarrow 1$, $f(z) \rightarrow a$ siempre y cuando $\frac{|1-z|}{1-|z|}$ permanece acotado.

Dem. Definamos $\tilde{a}_0 := a_0 - a$, así, $\tilde{a}_0 + a_1 + a_2 + \dots = 0$.

Definamos también $g(z) := f(z) - a = \tilde{a}_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$

y $S_n := \tilde{a}_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

$$\begin{aligned} \text{Notemos que } \tilde{a}_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n &= S_0 + (S_1 - S_0)z + \dots + (S_n - S_{n-1})z^n \\ &= S_0(1-z) + S_1(z-z^2) + \dots + S_{n-1}(z^{n-1} - z^n) + S_n z^n \\ &= (1-z)(S_0 + S_1 z + \dots + S_{n-1} z^{n-1}) + S_n z^n. \end{aligned}$$

Como $|z| < 1$, $S_n(z^n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, luego $g(z) = (1-z) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n$.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$, $(\exists N)(n \geq N) : |S_n| < \varepsilon / K$, para $K > 0$ fijo.

Se puede verificar que existe $D_K \subset \{w : |w| < 1\}$ con punto de acumulación fijo.

$1 = 1 + i \cdot 0$ y tal que $(\forall z \in D_K) \frac{|1-z|}{1-|z|} \leq K$.

Entonces

$$|g(z)| \leq |1-z| \left| \sum_{k=0}^{N-1} S_k z^k \right| + \frac{|1-z| \cdot |z|^N}{1-|z|} \cdot \frac{\varepsilon}{K}. \quad (*)$$

Sea $z_n \in D_K$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1$ y $M := \sum_{k=1}^{N-1} S_k$.

Luego, de (*) tenemos que

$$|g(z_n)| \leq |1-z_n| \left| \sum_{k=0}^{N-1} S_k z_n^k \right| + \frac{|1-z_n|}{1-|z_n|} \cdot |z_n|^N \cdot \frac{\varepsilon}{K}$$

$\rightarrow 0 \cdot M + K \cdot \frac{\varepsilon}{K}$, cuando $n \rightarrow \infty$. Como ε es arbitrario, se tiene el resultado. ■