

Diferenciabilidad

(22)

Def. 12. Sea $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

~~Definición~~ Decimos que $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es diferenciable en $z \in \mathbb{C}$ si:

$$\lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \text{ existe en } \mathbb{C}.$$

Este límite se denota como $f'(z)$, $\frac{df}{dw}(z)$, $\left. \frac{df}{dw} \right|_{w=z}$, $(Df)(z)$; y se llama la derivada de f en z .

También decimos que la función es analítica, u holomorfa en z .

Una función holomorfa en todo $\mathbb{C}$ se llama entera.

Nota 5. La derivada se puede también calcular como $\lim_{\substack{h \in \mathbb{C} \\ h \rightarrow 0}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$.

Sea $D \subset \mathbb{C}$; para ~~decir~~ decir que $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ es diferenciable en D , lo tomamos abierto. Como las componentes de un abierto son conexos, podemos suponer que D es conexo (conexo).

Prop 7.1) Si f es diferenciable en z , también es continua en z .

Sea $c \in \mathbb{C}$, f y g diferenciables en z . Entonces

$$i) (f + cg)'(z) = f'(z) + c \cdot g'(z).$$

$$ii) (fg)'(z) = f(z)g'(z) + f'(z)g(z).$$

$$iv) \left(\frac{1}{f}\right)'(z) = -\frac{f'(z)}{(f(z))^2} \text{ cuando } f(z) \neq 0.$$

$$v) \text{ Si } f(z) = z^n \text{ con } n \in \mathbb{Z}, \text{ entonces } f'(z) = n \cdot z^{n-1}.$$

Aquí, $z \neq 0$ cuando $n < 0$.

$$vi) \text{ Si } f \text{ es diferenciable en } z \text{ y } g \text{ en } f(z), \text{ entonces } (g \circ f)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z).$$

Dem. vi) Tomamos $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ todos diferentes y tal que $z_n \rightarrow z_0$.

$\forall \epsilon > 0$ Podemos pensar que $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ son todos diferentes,

a $f(z_0)$, de lo contrario f sería una constante en una vecindad de

z_0 , por lo que $(g \circ f)'(z) = \lim_{w \rightarrow z} \frac{g(f(w)) - g(f(z))}{w - z} = 0$. De igual

manera $f'(z) = 0$, por lo que se cumpliría el resultado.

Así, tomando $\{z_n\}$ con esas características,

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(z) &= \lim_{z_n \rightarrow z} \frac{g(f(z_n)) - g(f(z))}{z_n - z} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(f(z_n)) - g(f(z))}{z_n - z} \cdot \frac{f(z_n) - f(z)}{f(z_n) - f(z)} \\ &= g'(f(z)) \cdot f'(z). \end{aligned}$$

Ejemplo. i) Los polinomios $a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ son enteros.

ii) Las funciones racionales $\frac{P}{Q}$, donde

P y Q son polinomios, son analíticas en $\mathbb{C} \setminus \{\text{ceros de } Q\}$.

Teo 15. Si $f = u + iv$ es diferenciable en $z = a + ib$, entonces u y v tienen derivadas parciales y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann (CR):

$$U_x(a, b) = V_y(a, b) \quad \text{y} \quad U_y(a, b) = -V_x(a, b).$$

Dem. Tenemos que $f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$. En particular, tomando

$$h = x \in \mathbb{R}, \quad f'(z) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(z+x) - f(z)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{u(a+x, b) - u(a, b)}{x} + i \frac{v(a+x, b) - v(a, b)}{x} \right)$$

$$= \frac{du}{dx}(a, b) + i \frac{dv}{dx}(a, b). \quad \text{Similamente, } f'(z) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(z+iy) - f(z)}{iy} = \frac{1}{i} \frac{du}{dy}(a, b) + \frac{dv}{dy}(a, b).$$

Iguando ambas partes y multiplicando por i llegamos a las ecuaciones CR. $\square$

Teo 16. Sean U y V funciones $\mathbb{R}$ -valuadas definidas en una vecindad de $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tales que las derivadas parciales son continuas en z y satisfacen las ecuaciones CR en z .

Entonces $f := U + iV$ es holomorfa en z .

Dem. Sea $\varepsilon_z = \varepsilon_x + i\varepsilon_y$, con $\varepsilon_x, \varepsilon_y \in \mathbb{R}$.

Como las derivadas parciales son continuas, por el Teorema de Taylor,

$$U(x + \varepsilon_x, y + \varepsilon_y) = U(x, y) + \frac{dU}{dx}(x, y) \cdot \varepsilon_x + \frac{dU}{dy}(x, y) \varepsilon_y + R_1(\varepsilon_x, \varepsilon_y),$$

$$\text{donde } \lim_{\varepsilon_z \rightarrow 0} \frac{R_1(\varepsilon_x, \varepsilon_y)}{|\varepsilon_z|} = 0.$$

Similarmente,

$$V(x + \varepsilon_x, y + \varepsilon_y) = V(x, y) + \frac{dV}{dx}(x, y) \cdot \varepsilon_x + \frac{dV}{dy}(x, y) \cdot \varepsilon_y + R_2(\varepsilon_x, \varepsilon_y),$$

$$\text{donde } \lim_{\varepsilon_z \rightarrow 0} \frac{R_2(\varepsilon_x, \varepsilon_y)}{|\varepsilon_z|} = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Luego } f(z + \varepsilon_z) &= U(x + \varepsilon_x, y + \varepsilon_y) + i \cdot V(x + \varepsilon_x, y + \varepsilon_y) \\ &= f(z) + \frac{dU}{dx}(x, y) \varepsilon_x + \frac{dU}{dy}(x, y) \varepsilon_y + R_1(\varepsilon_z) \\ &\quad + i \left(\frac{dV}{dx}(x, y) \varepsilon_x + \frac{dV}{dy}(x, y) \varepsilon_y + R_2(\varepsilon_z) \right). \end{aligned}$$

Usando las ec. de CR obtenemos

$$f(z + \varepsilon_z) = \left(\frac{dU}{dx}(x, y) + i \frac{dV}{dx}(x, y) \right) \varepsilon_z + R_1(\varepsilon_z) + i R_2(\varepsilon_z).$$

$$\text{Por lo tanto } \lim_{\varepsilon_z \rightarrow 0} \frac{f(z + \varepsilon_z) - f(z)}{\varepsilon_z} = \frac{dU}{dx}(x, y) + i \frac{dV}{dx}(x, y). \quad (*) \quad \square$$

La ecuación (*) nos da una manera de derivar; también $V_y \equiv i U_y$, etc.

Def 13. Definimos

$$f_x := \frac{du}{dx} + i \frac{dv}{dy} \quad y \quad f_y := \frac{du}{dy} + i \frac{dv}{dx},$$

y las derivadas de Wirtinger

$$f_z := \frac{1}{2} \{ f_x - i f_y \} \quad y \quad f_{\bar{z}} := \frac{1}{2} \{ f_x + i f_y \}.$$

Prop 8. Sea $f := u + iv : D \rightarrow \mathbb{C}$ con $D \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo.

Supongamos que f_x y f_y son continuas en D .

Entonces f es holomorfa en D si y solo si $f_{\bar{z}} = 0$ en D .

En cuyo caso $f' = f_z$.

Teo 17. Si f es holomorfa en D y su rango está en $\mathbb{R}$, entonces f es constante.

Dem. Consideramos la forma $P = u + iv$. Por hipótesis $v = 0$.

Entonces por las ecuaciones CR $U_x = V_y = 0$ y $U_y = -V_x = 0$, por lo que u es constante.

Teo 18. Si f es holomorfa y $f' = 0$ en D , entonces f es constante.

Dem. Considerando la forma $P = u + iv$, como vimos en el Teo 16, la hipótesis dice que $U_x + iV_x = 0$ en D . Por la ec. CR

$V_y = U_y = 0$ en D , Por lo que u y v son constante en D .

~~Teo 19.~~ Sea

Teo 19. Sea $\sum a_n z^n$ con radio de convergencia $\rho > 0$. (26)
Entonces i) $s(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es holomorfa en $D := \{w : |w| < \rho\}$.

ii) $g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n z^{n-1}$ tiene radio de convergencia ρ .

iii) $s'(z) = g(z)$ en D .

Dem. ii) Sea ρ^* el radio de convergencia de g .
Por el Teorema de Hadamard, $\frac{1}{\rho} = \limsup (n a_n)^{1/n} = \limsup n^{1/n} \cdot \limsup a_n^{1/n} = 1/\rho$.

i) y iii). Usando $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$,
para $n \geq 2$, tenemos

$$\begin{aligned} f(h) &:= \left| \frac{s(z+h) - s(z)}{h} - g(z) \right| = \left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left(\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n \cdot z^{n-1} \right) \right| \\ &= \left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left\{ (z+h)^{n-1} + z(z+h)^{n-2} + \dots + (z+h)z^{n-2} + z^{n-1} - n z^{n-1} \right\} \right|. \end{aligned}$$

Ahora, para $z \in D$, fijemos r tal que $|z| < r < \rho$ y tomamos $z+h$ tal que $|z+h| < r$. Así,

$$\left| (z+h)^{n-1} + z(z+h)^{n-2} + \dots + z^{n-1} - n z^{n-1} \right| \leq \overbrace{r^{n-1} + \dots + r^{n-1}}^n + n \cdot r^{n-1} = z \cdot n \cdot r^{n-1}.$$

Por ii) $\sum_{n=2}^{\infty} z \cdot |a_n| \cdot n \cdot r^{n-1} < \infty$, luego

$(\forall \varepsilon > 0) (\exists N > 0) \sum_{n=N}^{\infty} z \cdot |a_n| \cdot n \cdot r^{n-1} < \varepsilon/2$. Así

$$f(h) \leq \left| \sum_{n=2}^{N-1} |a_n| \left| \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n \cdot z^{n-1} \right| \right| + \varepsilon/2.$$

Notemos que $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n \cdot z^{n-1} \right) = \frac{d}{dz} z^n - n \cdot z^{n-1} = 0$.

Por lo tanto, hay $\delta > 0$ tal que $|h| < \delta \Rightarrow f(h) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.