

Cor 6 i) Sea  $S_N(z) := \sum_{n=0}^N a_n \cdot z^n$ , entonces

(27)

$$\left. \frac{d}{dz} \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(z) \right|_w = \lim_{N \rightarrow \infty} \left. \frac{d}{dz} S_N(z) \right|_w, \text{ para } w \in D.$$

$$ii) S^{(n)}(z) = n! \cdot a_n + \frac{(n+1)!}{1!} a_{n+1} z + \frac{(n+2)!}{2!} a_{n+2} z^2 + \dots$$

$$\text{y } a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}.$$

Así, una serie de potencias es infinitamente diferenciable en su disco de convergencia.

La función exponencial.

¿Qué función  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  satisface que  $f'(z) = f(z)$  y  $f(0) = 1$ ?

Candidato:  $g(z) := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots$

Tiene radio de convergencia  $\rho = \infty$  y por el Teorema anterior cumple lo deseado. Así, definimos

$$e^z := \exp(z) := g(z).$$

Lema 2.  $(\forall z \in \mathbb{C}) e^z \cdot e^{-z} = 1$  y  $e^z \neq 0$ .

Dem. Definamos  $h(z) := e^z \cdot e^{-z}$ , luego  $h'(z) = e^z \cdot (-1) e^{-z} + e^z \cdot e^{-z} = 0$ .

Pero por el Teo 1, la función entera  $h$  es constante, y como  $h(0) = 1$ , se cumple lo deseado.

Teo 14.  $e^z$  es la única función que cumple

$$f'(z) = f(z) \text{ y } f(0) = 1. \quad (*)$$

Dem. Supongamos que hay  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  que satisface (\*). (29)

Definimos  $h(z) = \frac{g(z)}{e^z}$ . Derivando obtenemos

$$h'(z) = \frac{g'(z)e^z - g(z)e^z}{(e^z)^2}. \text{ Por el Lema 2 podemos}$$

decir que  $h'(z) = 0$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

Pero  $h$  es una función entera, luego, por el Teo 18 tiene que ser constante, y como  $g(0) = 1$ ,  $h(z) = 1$

$$\therefore g(z) = e^z.$$

Prop 8.  $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$  para todos  $z, w \in \mathbb{C}$ .

Dem. Definir  $h(z) = \frac{e^{z+w}}{e^w}$ . Se puede ver que  $h'(z) = h(z)$  y  $h(0) = 1$ .

Luego, por el teorema anterior  $h(z) = e^z \therefore e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ .

Prop 9. Sea  $z = x + iy$ , entonces

$$i) e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$$

$$ii) |e^z| = e^x \text{ y } z = |z| \cdot e^{j \cdot \arg(z)}.$$

Dem. i) Recuerde que  $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$   
y  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$

Por la proposición anterior  $e^{z+w} = e^x e^{iy}$  y por definición de  $e^z$ ,  $e^{iy} = 1 + \frac{(iy)'}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \dots = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \dots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots\right)$   
 $= \cos y + i \sin y$ .

De esto surge ii), en particular la fórmula de Euler  
 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ .

Cor 7. i)  $c \in \mathbb{C}$  es un periodo de  $e^z$  (i.e.  $\forall z \in \mathbb{C} \ e^{z+c} = e^z$ ) si y solo si  $c = 2\pi i \cdot n$  por todo  $n \in \mathbb{Z}$ . (29)

ii)  $\operatorname{sen} y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$ ,  $\cos(y) = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$ .

Def 14. Para  $z \in \mathbb{C}$

$$\operatorname{sen}(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Prop 10. Para  $z \in \mathbb{C}$ ,

i)  $(\operatorname{sen} z)^2 + (\cos z)^2 = 1$

ii)  $\operatorname{sen}(z+w) = \cos z \cdot \operatorname{sen} w + \operatorname{sen} z \cdot \cos w$

~~iii)~~  $\cos(z+w) = \cos z \cdot \cos w - \operatorname{sen} z \cdot \operatorname{sen} w$

iii)  $\cos z + i \operatorname{sen} z = e^{iz}$

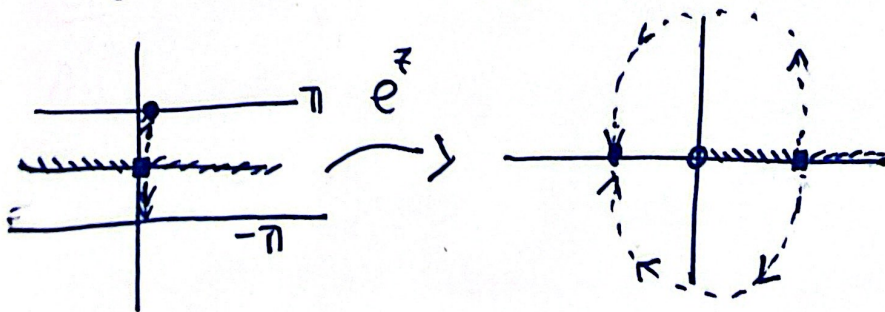
iv)  $\cos(-z) = \cos(z)$ ,  $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$ .

v)  $\cos'(z) = -\operatorname{sen}(z)$ ,  $\operatorname{sen}'(z) = +\cos(z)$ .

Veamos ahora como definir  $\log z$ .

Queremos que  $w = e^z \Leftrightarrow \log w = z$ .

Tomando  $z = x + iy$ , como  $e^z = e^x \cdot e^{iy}$ , vemos el rango del conjunto  $\{x \in \mathbb{R}, y \in (-\pi, \pi]\}$  bajo  $e^z$  es  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Vea el dibujo



Def 15. Definimos  $\log w$  para  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , como

(30)

el único

$$z \in A := \{ u \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(u) \in (-\pi, \pi] \}$$

tal que  $e^z = w$ . Así, si  $w = r \cdot e^{i\theta}$ , entonces  $z = \log r + i\theta$ .

Esto es la rama principal del logaritmo complejo.

Es inyectiva y  $\log(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = A$ . Luego, para  $z \neq 0$

$$\log e^z = z \quad \text{y} \quad e^{\log z} = z.$$

Nota 6. Sea  $f = u + i \cdot v$  holomorfa. Usando  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

podemos usar coordenadas polares  $f(z) = u(r, \theta) + i \cdot v(r, \theta)$ .

Entonces las ecuaciones CR en coordenadas polares son

$$r \cdot \frac{du}{dr} = \frac{dv}{d\theta} \quad \text{y} \quad r \frac{dv}{dr} = -\frac{du}{d\theta}$$

Recíprocamente, si se satisfacen estas condiciones y las parciales son continuas, entonces  $f$  es holomorfa.

~~Def 15.~~ Prop 11. i)  $\log z$  es holomorfa en  $D = \mathbb{C} \setminus \{(-\infty, 0]\}$

$$\text{y} \quad \frac{d}{dz} \log(z) = \frac{1}{z} \text{ en } D.$$

$$\text{ii) } \log(z_1 \cdot z_2) = \log(z_1) + \log(z_2) \text{ cuando } -\pi < \arg(z_1) + \arg(z_2) \leq \pi.$$

Dem. Sabemos que  $\log$  es continua en  $D$ . Tomando  $z = r \cdot e^{i\theta}$ ,  $\log(z) = \log r + i\theta$ .

Así,  $u(r, \theta) = \log r$  y  $v(r, \theta) = \theta$  define la representación polar de  $\log$ .

Vemos que  $\frac{du}{dr} = \frac{1}{r}$ ,  $\frac{du}{d\theta} = 0$ ,  $\frac{dv}{dr} = 0$ ,  $\frac{dv}{d\theta} = 1$ . Por lo que se satisfacen las ec. CR polares y tales parciales son continuas. Por lo que  $\log$  es holomorfa en  $D$ . Entonces podemos derivar  $z = e^{\log z}$ :

$$1 = e^{\log z} \frac{d}{dz} \log z \Rightarrow \frac{d \log z}{dz} = \frac{1}{z} \text{ con } z \in D.$$

ii) si  $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$  y  $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ ,  $\log(z_1 z_2) = \log(r_1 r_2) + i(\theta_1 + \theta_2)$ .

Pero  $\theta_1 + \theta_2$  debe estar en  $(-\pi, \pi]$ .

Def 16. Para  $z, w \in \mathbb{C}$  con  $z \neq 0$  definimos

$$z^w := e^{w \cdot \log z}.$$

Def 17. Una función compleja  $f$  definida en una vecindad  $z_0 \in \mathbb{C}$

tiene una expansión en series de potencias alrededor de  $z_0$

si existe  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{C}$  con  $\rho := \limsup |a_n|^{1/n} > 0$  tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{para } z \in \cancel{B_p(z_0)} B_p(z_0).$$

Teo 21. Sean  $f$  y  $g$  ambas con expansiones alrededor de  $z_0 \in \mathbb{C}$ .

Si  $(\exists \rho > 0) (\forall z \in B_\rho(z_0)) f(z) \cdot g(z) = 0$ , entonces  $f$  ó  $g$  es cero en

$B_\rho(z_0)$ . Dem. Sean  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\} \subset \mathbb{C}$  tales que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{y} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \quad \text{para } z \in B_\rho(z_0).$$

Tomemos  $k_1 := \min\{n : a_n \neq 0\}$  y  $k_2 := \min\{n : b_n \neq 0\}$ .

$$\text{Como } f(z) \cdot g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n \quad \text{con} \quad C_n = \sum_{i+j=n} a_i \cdot b_j,$$

entonces  $C_{k_1+k_2} = a_{k_1} \cdot b_{k_2} \neq 0$ . Pero

$$C_{k_1+k_2} = \frac{1}{(k_1+k_2)!} \left. \frac{d^{k_1+k_2}}{dz^{k_1+k_2}} (f \cdot g) \right|_{z_0} = 0, \quad \text{lo cual es una contradicción.}$$

□

(3)

Teo 22. Si  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  tiene radio de convergencia  $\rho > 0$ , (32)

entonces i) Para  $z_0 \in B_\rho(0)$ ,  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \cdot z^n$  tiene  
radio de convergencia  $\rho' = \rho - |z_0|$ .

ii)  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$  para  $z \in B_{\rho'}(z_0)$ .

Esto nos dice que  $f$  admite una expansión para cada  $z \in B_\rho(0)$ .

Dem. i) Veamos que  $g(z)$  es absolutamente convergente si

$$|z| < \rho - |z_0|. \text{ Sabemos que } f^{(n)}(z_0) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \cdot \underbrace{k(k-1)\cdots(k-n+1)}_{\frac{k!}{(k-n)!}} z_0^{k-n}$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} a_k \frac{k!}{(k-n)!} z_0^{k-n}$$

$$\text{Así } |f^{(n)}(z_0)| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |a_k| \frac{k!}{(k-n)!} |z_0|^{k-n}$$

Sea  $r \in (|z_0|, \rho)$ , luego

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \right| (r - |z_0|)^k &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k |a_n| \binom{k}{n} |z_0|^{k-n} (r - |z_0|)^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k |a_n| \binom{k}{n} |z_0|^{k-n} (r - |z_0|)^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| (|z_0| + r - |z_0|)^k < \infty. \end{aligned}$$

$\therefore g$  es abs. conv. para  $|z| < r - |z_0| \therefore$  el radio de convergencia

es  $\rho' = \rho - |z_0|$ .

ii) Si  $|z - z_0| < \rho'$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$  converge. Entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=n}^{\infty} a_k \cdot \frac{k!}{(k-n)!} z_0^{k-n} \cdot (z - z_0)^n = \dots = f(z).$$