

Ejemplo $f(z) = \frac{1}{1-z}$ existe en $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Pero en $B_1(0)$

tiene la expansión $f(z) = 1 + z + z^2 + \dots$

Teo 23 Sea $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ con expansión alrededor de $z_0 \in \mathbb{C}$ y tal que $f(z_0) \neq 0$. Entonces $\frac{1}{f}$ también tiene una expansión alrededor de z_0 .

Dem Sin pérdida de generalidad supongamos que $z_0 = 0$ y $f(0) = 1$.

Luego, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ con $a_0 = 1$ y $\rho > 0$.

Queremos encontrar $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot z^n$ con radio de convergencia $\sigma > 0$ tal que $f(z)g(z) = 1$. De esto, $a_0 b_0 = 1$, luego $b_0 = 1$.

También $a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0$, luego $b_1 = -a_1$.

En general, como se debe cumplir $a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \dots + a_0 b_n = 0$, entonces $b_n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} \cdot b_k$.

Como $\limsup |a_n|^{1/n} = \frac{1}{\rho}$, existe M tal que $(\forall n) |a_n| < M^n$.

Probemos por inducción que $(\forall n) |b_n| \leq 2^{n-1} \cdot M^n$.

Como $|b_1| = |a_1| \leq M$, se cumple para $n=1$.

$$\begin{aligned} \text{Ahora, } |b_{n+1}| &\leq \sum_{k=0}^n |b_k| \cdot |a_{n+1-k}| = |a_{n+1}| + \sum_{k=1}^n |b_k| \cdot |a_{n+1-k}| \\ &\leq M^{n+1} + \sum_{k=1}^n 2^{k-1} \cdot M^k \cdot M^{n+1-k} = M^{n+1} (1 + 2^n - 1). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{\sigma} = \limsup |b_n|^{1/n} \leq \limsup (2^{n-1} \cdot M^n)^{1/n} = 2M < \infty \therefore \sigma > 0.$$

Mapas conformes

34

Intuitivamente una función $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es conforme cuando al evaluar dos puntos z_1 y z_2 , el ángulo entre ellos se preserva. Resulta que las funciones holomorfas tienen esta propiedad, lo cual ~~habría~~ surge también de la rigidez de estas funciones.

Consideremos $f = u + iv$ holomorfa en $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{C}$.

Si hacemos un desplazamiento ^{pequeño} de z_0 en la dirección $(\epsilon_1, \delta_1) = r_1 e^{i\theta_1}$, el efecto bajo u se puede aproximar con

$$u(x_0 + \epsilon_1, y_0 + \delta_1) \approx u(x_0, y_0) + u_x(x_0, y_0) \cdot \epsilon_1 + u_y(x_0, y_0) \cdot \delta_1.$$

Similarmete, bajo v tenemos

$$v(x_0 + \epsilon_1, y_0 + \delta_1) \approx v(x_0, y_0) + v_x(x_0, y_0) \cdot \epsilon_1 + v_y(x_0, y_0) \cdot \delta_1.$$

Es decir, el efecto de $\sqrt{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ al vector $\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix}$ se aproxima con el

$$\text{Jacobiano: } \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} \bigg|_{z_0} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix} = J(z_0) \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Pero por las ec. CR esto es } \begin{bmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{bmatrix} \bigg|_{z_0} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix} = J(z_0) \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix}.$$

Podemos ver que el Jacobiano $J(z_0)$ representa un número complejo $r e^{i\theta}$. Entonces, al ver el efecto de f en algún otro vector que emana de z_0 en otra dirección $(\epsilon_2, \delta_2) = r_2 e^{i\theta_2}$, el movimiento ~~aproximado~~ en el ángulo será el mismo (al menos aproximadamente). Observe que

$$\begin{aligned} & \left| \arg \left(J(z_0) \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix} \right) - \arg \left(J(z_0) \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_2 \\ \delta_2 \end{pmatrix} \right) \right| = \left| \arg(r \cdot e^{i\theta} \cdot r_1 e^{i\theta_1}) - \arg(r e^{i\theta} \cdot r_2 e^{i\theta_2}) \right| \\ &= \left| \arg(e^{i(\theta + \theta_1)}) - \arg(e^{i(\theta + \theta_2)}) \right| = \left| \arg(\epsilon_1) - \arg(\epsilon_2) \right|. \end{aligned}$$

Def 18 Sea $G \subset \mathbb{C}$. Una trayectoria o curva $\gamma: [a, b] \rightarrow G$ continua es suave si $\gamma'(t)$ existe en $\mathbb{C}$ para toda $t \in [a, b]$ y además $\gamma': [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continua.

Decimos que es suave en pedazos si hay una partición

$\{t_0=a, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n=b\}$ de $[a, b]$ tal que γ es suave en cada subintervalo (t_{i-1}, t_i) , $i=1, \dots, n$.

Como γ es de la forma $u+iv$ con $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, γ es suave si u y v lo son. Supongamos que $\gamma: [a, b] \rightarrow G$ es suave, y para algún $t_0 \in [a, b]$, $\gamma'(t_0) \neq 0$. Entonces la recta $\{r \cdot \gamma'(t_0) + z_0, r \geq 0\}$, donde $z_0 = \gamma(t_0)$, es tangente a γ en z_0 . Dicha recta tiene pendiente $\tan(\arg(\gamma'(t_0)))$.

Def 19 i) Considere dos trayectorias $\gamma_1, \gamma_2: [a, b] \rightarrow G$ suaves para las cuales $z_0 = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$ con $t_1, t_2 \in [a, b]$ y $\gamma_1'(t_1) \neq 0 \neq \gamma_2'(t_2)$. Definimos el ángulo entre curvas en el punto z_0 como $\{\arg(\gamma_1'(t_1)) - \arg(\gamma_2'(t_2))\}$, denotado $\text{Ang}(\gamma_1, \gamma_2, z_0)$.

ii) Una función $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ es conforme en $z_0 \in G$ si

$$\text{Ang}(f(\gamma_1), f(\gamma_2), f(z_0)) = \text{Ang}(\gamma_1, \gamma_2, z_0)$$

Teo 24 Si $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces es conforme para cada punto $z_0 \in G$ con $f'(z_0) \neq 0$.

Dom. Sean ~~dos~~ $\gamma_1, \gamma_2: [a, b] \rightarrow G$ suaves tal que

$$\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0 \quad \text{y} \quad \gamma_1'(t_1) \neq 0 \neq \gamma_2'(t_2) \quad \text{para} \quad t_1, t_2 \in [a, b].$$

Definimos $\sigma_1 := f \circ \gamma_1$ y $\sigma_2 := f \circ \gamma_2$.

Por la regla de la cadena

$$\sigma_1'(t_1) = f'(\gamma_1(t_1)) \cdot \gamma_1'(t_1) \quad \text{y} \quad \sigma_2'(t_2) = f'(\gamma_2(t_2)) \cdot \gamma_2'(t_2).$$

Así, $\text{Ang}(\sigma_1, \sigma_2, f(z_0)) =$

$$= \left(\arg(\sigma_1'(t_1)) - \arg(\sigma_2'(t_2)) \right)$$

$$= \left(\arg(f'(z_0) \gamma_1'(t_1)) - \arg(f'(z_0) \gamma_2'(t_2)) \right)$$

$$= \left(\arg(\gamma_1'(t_1)) - \arg(\gamma_2'(t_2)) \right) = \text{Ang}(\gamma_1, \gamma_2, z_0).$$

Ejercicio. $f(\bar{z}) = \bar{z}$? Anticonforme: $\text{Ang}(f(\gamma), \dots) = -\text{Ang}(\gamma, \dots)$

Teo. (del mapeo de Riemann). Sea A estructuralmente contenida en $\mathbb{C}$ una región simplemente conexa (i.e. conexa y "sin hoyos").

Entonces existe $f: A \rightarrow D(0)$ biyectivo y conforme.

Transformaciones de Möbius.

37

Def 20. Una transformación fraccional lineal es de la forma

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{C}.$$

Notemos que

$$T(z) = \frac{a(cz+d)+bc-ad}{c(cz+d)} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c} \cdot \frac{1}{cz+d}. \quad (*)$$

También los coeficientes no son únicos, pues $\frac{(waz+wb)}{(wcz+wd)} = \frac{az+b}{cz+d}$.

Teo 25. i) Si $bc-ad=0$, T es constante.

ii) Si $bc-ad \neq 0$, T es invertible y $T^{-1}(z) = \frac{dz-b}{a-cz} = \frac{dz-b}{-cz+a}$.
Además, $T(\infty) = \frac{a}{c}$ y $T(-\frac{d}{c}) = \infty$.

iii) T es la composición de

1) Traducción: $S_1(z) = z+a$,

2) Dilatación: $S_2(z) = r \cdot z$, $r \neq 0$,

3) Rotación: $S_3(z) = e^{i\theta} \cdot z$, $\theta \in [0, 2\pi)$,

4) Inversión: $S_4(z) = \frac{1}{z}$.

iv) T tiene a lo más 2 puntos fijos (si T no es la identidad).

Dem. i) y iii) surgen de (*).

ii) Sea $S(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$, entonces $z = T \circ S \Leftrightarrow \frac{a \left(\frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} \right) + b}{c \left(\frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} \right) + d} = z$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a a_1 + b c_1 = 1 \\ c a_1 + d c_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a b_1 + b d_1 = 0 \\ c b_1 + d d_1 = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a = d, c_1 = c \\ b_1 = -b, d_1 = a \end{cases} \Leftrightarrow bc-ad \neq 0.$$

y se puede verificar que $S \circ T = z$.

IV) ^{Surge por que} $T(z) = z \Leftrightarrow C \cdot z^2 + (d-a)z - b = 0$. $\square$

En el caso ii) llamamos a T de Möbius.

Cor 8 i) El conjunto de transformaciones de Möbius forma un grupo.

ii) Las transformaciones de Möbius son conformes.

Dem. i) Surge de ii) en el Teo 25.

ii) Veamos que $T'(z) \neq 0$ para toda $z \in \mathbb{C}$.

Como $T^{-1} \circ T(z) = z$, por la regla de la cadena $1 = (T^{-1})'(T(z)) \cdot T'(z)$,

luego $T'(z) \neq 0$.

Sean $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ distintos. Consideramos la transformación de Möbius $T(z) := \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$.

Si $z_1 = \infty$, ^{definimos} $T(z) = \frac{z_3-z_2}{z-z_2}$. Si $z_2 = \infty$, $T(z) = \frac{z-z_1}{z_3-z_1}$. Si $z_3 = \infty$, $T(z) = \frac{z-z_1}{z-z_2}$.

Prop II, T es la única transformación de Möbius que cumple

$$T(z_1) = 0, T(z_2) = \infty, T(z_3) = 1.$$

Dem. Supongamos que hay otra $S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con estas condiciones.

Entonces

$$\begin{pmatrix} Cz_2 + d = 0 \\ a z_1 + b = 0 \\ \frac{a z_3 + b}{c z_3 + d} = 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a = -\frac{b}{z_1} \\ b = -\frac{d}{z_2} \\ b \frac{z_1 - z_3}{z_1} = \frac{d(z_2 - z_3)}{z_2} \end{pmatrix} \Rightarrow S = T \quad (\text{el sustituir})$$

Teo 26. Dados $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ distintos, y $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$ distintos, existe una única transformación de Möbius T tal que

$$T(z_i) = w_i, \quad i=1,2,3.$$

Dem. Sean $T_1(z) := \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$ y $T_2(z) := \frac{z-w_1}{z-w_2} \cdot \frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}$.

Ambas son de Möbius y tales que $T_1(z_i) = T_2(w_i), i=1,2,3$.

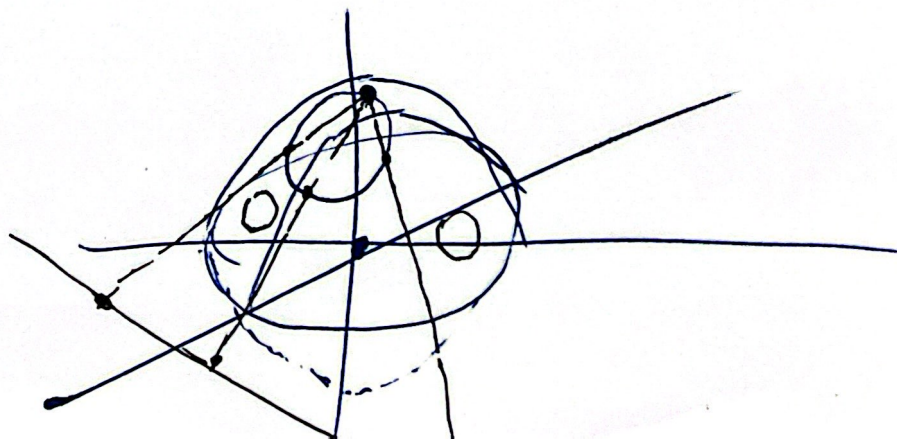
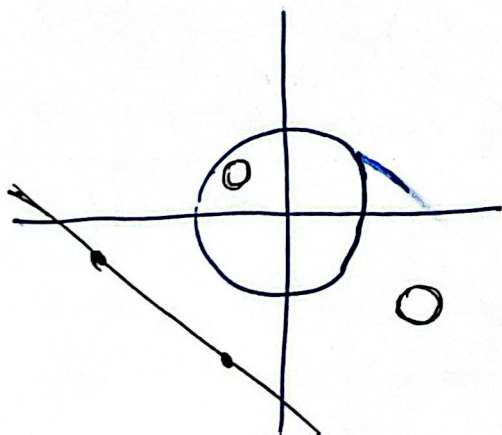
Así, $T(z) := T_2^{-1} \circ T_1$ cumple lo deseado.

Supongamos que hay otra transformación de Möbius S que cumple lo deseado, entonces $T_2 \circ S$ lleva z_1, z_2, z_3 a $0, \infty, 1$, respectivamente.

Por la Proposición II, $T_2 \circ S$ es única, ^{por lo que} ~~luego~~ $T_2 \circ S = T_2 \circ T$.

~~Para~~ Luego $T_2^{-1} \circ T_2 \circ S = T_2^{-1} \circ T_2 \circ T \therefore S = T$.

Nota 7. Dado 3 puntos distintos, $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, hay un círculo o recta que pasa por ellos tres. Además, los círculos y rectas son círculos sobre la esfera de Riemann. Usando la proyección estereográfica. Note que las rectas son círculos sobre S que pasan por el polo norte. Podemos entonces ~~ver~~ ^{pensar} que las transformaciones de Möbius ~~transforman~~ llevan círculos en círculos sobre S .



Por unicidad podemos definir lo siguiente.

Def 21. La razón cruzada (w, z_1, z_2, z_3) , con $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ diferentes:

$$(w, z_1, z_2, z_3) := \frac{(w - z_1)(z_3 - z_2)}{(w - z_2)(z_3 - z_1)}.$$

Prop 12. Sean $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ diferentes, y T una transformación de Möbius. Entonces, para toda $w \in \hat{\mathbb{C}}$,

$$(w, z_1, z_2, z_3) = (T(w), T(z_1), T(z_2), T(z_3)).$$

Dem. Sea $S(w) := (w, z_1, z_2, z_3)$. Entonces, ~~para~~ si $M := S \circ T^{-1}$,

$$M(T(z_1)) = 0, \quad M(T(z_2)) = \infty, \quad M(T(z_3)) = 1.$$

$$\text{Luego } M(z) = (z, T(z_1), T(z_2), T(z_3)).$$

$$\text{Por lo que } S(z) = M(T(z)) = (T(z), T(z_1), T(z_2), T(z_3)).$$

Prop 13. Una transformación de Möbius lleva círculos y rectas en $\mathbb{C}$, a círculos ó rectas en $\mathbb{C}$.

Dem. Notamos que S_1, S_2 y S_3 lleva círculos en círculos y rectas en rectas.

Analicemos $S_4(z) = 1/z$. Sea $\theta \in [0, 2\pi)$ fija, y sea

Sea $R := \{ r \cdot e^{i\theta}, r \cdot e^{i(\theta+\pi)} \}_{r \geq 0}$ la recta que pasa por el origen.

$$\text{Luego } S_4(R) = \{ r^{-1} e^{-i\theta}, r^{-1} e^{-i(\theta+\pi)} \}_{r \geq 0} = R.$$

$$\text{Ahora sea } C := \{ z = (x+iy) : (x-a)^2 + (y-b)^2 = c \}.$$

$$\text{Notemos que } S_4(z) = u + i \cdot v = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}.$$

$$\text{Si } c = a^2 + b^2, \text{ tenemos que } z \in C \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{2ax}{x^2+y^2} + \frac{2b(-y)}{x^2+y^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow S_4(z) \in \{ (u, v) : 2a \cdot u - 2b \cdot v = 1 \}.$$

Es decir, S_4 lleva círculos que tocan el origen a rectas que no pasan por el origen. Y viceversa.

Si $C \neq a^2 + b^2$, tenemos que

$$z \in C \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by = c - a^2 - b^2 \Leftrightarrow$$

$$S_4(z) \in \{(u, v): 1 - 2au - 2bv = (c - a^2 - b^2)(u^2 + v^2)\},$$

lo cual es un círculo, pues $(2a)^2 + (2b)^2 + 4(c - a^2 - b^2) = 4c > 0$.

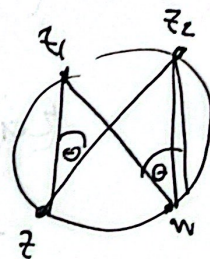
Usamos que $\alpha(x^2 + y^2) + \beta x + \gamma y = \delta$ caracteriza un círculo si y solo si $\beta^2 + \gamma^2 + 4\alpha\delta > 0$.

Así, tenemos el resultado, pues cualquier transformación de Möbius es composición de $S_i, i=1, 2, 3, 4$.

Cor 9. Sea $C \in \mathbb{C}$ un círculo y $z_1, z_2 \in C$.

Entonces, para todo par $z, w \in C \setminus \{z_1, z_2\}$,

$$|\operatorname{Arg}(z - z_1) - \operatorname{Arg}(z - z_2)| = |\operatorname{Arg}(w - z_1) - \operatorname{Arg}(w - z_2)|$$



Dem. Sabemos que $(z, z_1, z_2, w) \in \mathbb{R}$,

luego el argumento es 0 o 2π .

$$\text{Pero } \operatorname{Arg}(z, z_1, z_2, w) = \operatorname{Arg}\left(\frac{z - z_1}{z - z_2}\right) + \operatorname{Arg}\left(\frac{w - z_2}{w - z_1}\right)$$

$$= \operatorname{Arg}(z - z_1) - \operatorname{Arg}(z - z_2) - [\operatorname{Arg}(w - z_1) - \operatorname{Arg}(w - z_2)]$$

Sea $z \in \mathbb{C}$ y T tra. de Möbius. Como z y $\bar{z}$ son simétricos c.r.a. $\mathbb{R}$, decimos que $T(z)$ y $T(\bar{z})$ son simétricos c.r.a. $T(\mathbb{R}) = A$, lo cual puede ser un círculo o una recta.

Sean $z_1, z_2, z_3 \in A$ distintos, como la imagen de $S(w) := (w, z_1, z_2, z_3)$ es $\mathbb{R}$,

S es inversa de T . Así, w y w^* son simétricos c.r.a. A si y solo si $S(w) = \overline{S(w^*)}$.

Def 22. Sean $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ distintos y A el círculo o recta determinada por estos puntos. Decimos que w_1 y $w_2 \in \hat{\mathbb{C}}$ son simétricos c.r.a. A si $(w_1, z_1, z_2, z_3) = \overline{(w_2, z_1, z_2, z_3)}$. (42)

Teo 27. (Principio de Simetría)

Sean C_1 y C_2 dos "círculos" en $\hat{\mathbb{C}}$ tal que $T(C_1) = C_2$ para alguna transformación de Möbius. Entonces un par z y w son simétricos c.r.a. C_1 si y solo si $T(z)$ y $T(w)$ son simétricos c.r.a. C_2 .

Dem. Sean $z_1, z_2, z_3 \in C_1$ distintos. Tenemos por la Prop 12,

$$\begin{aligned} (T(w), T(z_1), T(z_2), T(z_3)) &= (w, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)} \\ &= \overline{(Tz, T(z_1), T(z_2), T(z_3))}. \end{aligned}$$

Def 23. Sea A un círculo en $\hat{\mathbb{C}}$. Una orientación de A es una tripleta (z_1, z_2, z_3) con $\{z_1, z_2, z_3\} \subset A$.

Teo 28. (Principio de orientación) Sean C_1 y C_2 dos círculos en $\hat{\mathbb{C}}$ y T de Möbius tal que $T(C_1) = C_2$. Sea (z_1, z_2, z_3) una orientación de C_1 . Entonces, el lado derecho de C_1 c.r.a. (z_1, z_2, z_3) es llevado al lado derecho de C_2 c.r.a. $(T(z_1), T(z_2), T(z_3))$.

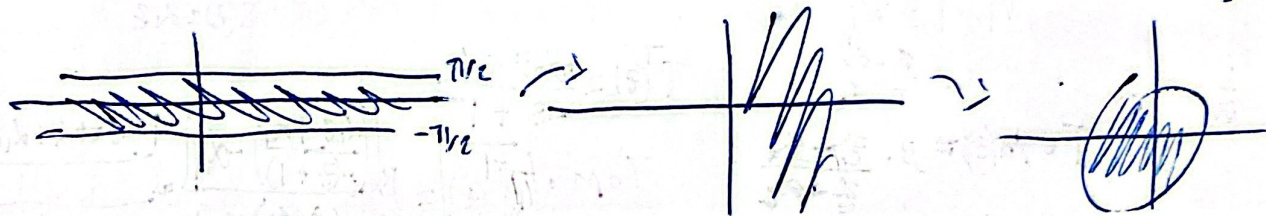
Ejemplo Sea $G := \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$. Construye $f: G \rightarrow B(0)$ homomorfismo.

Sea $S(z) = (z, 0, i, -i) = \frac{z}{z-i}$ y

$R(z) = (z, -1, i, -i) = \frac{-2i z + 1}{1-i z - i}$

Así, $R^{-1}(z) = \frac{(1+i)z - 2i}{(-1)z + 2i}$, luego $f(z) = R^{-1} \circ S(z) = \frac{z-i}{z+i}$ cumple lo deseado.

Con $g(z) := f(e^z) = \frac{e^z - i}{e^z + i}$ Ahora se lleva $G := \{z : \operatorname{Im}(z) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$ a $B(0)$.



Nota 8. Consideramos el homomorfismo entre transformaciones de Möbius y matrices.

Sea $\alpha := ad - cb$. Se tiene que $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{1/\alpha \cdot az+b}{1/\alpha \cdot cz+d} = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$ es tal que $a'd' - c'b' = 1$. Definimos $[T] := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, entonces nos enfocamos a matrices $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tales que $\det M = 1$. Aunque en general

Al restringirnos a estas matrices se tiene $[T_1 \circ T_2] = [T_1] \cdot [T_2]$ y $[T^{-1}] = [T]^{-1}$. $[T^{-1}] = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Ejemplo ~~Veamos~~ Veamos las transformaciones de Möbius que preservan el disco unitario $B(0)$. Primero, sea T tal que $T(-1) = i$, $T(0) = -1$, $T(1) = -i$.

Si $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$; entonces al sustituir y resolver $T(z) = \frac{z-i}{z+i}$.

Ahora, sea $S: B(0) \rightarrow B(0)$, entonces $U := T^{-1} \circ S \circ T$ preserva $H := \{z : \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

Luego $U(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$ con $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}$, pues U debe preservar $\mathbb{R}$. En particular

$U(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Calculemos $S = T \circ U \circ T^{-1}$ usando matrices.

$[T^{-1}] = \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}$. Luego $\begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}$, $\alpha = \frac{(a+d) + i(b-c)}{2}$, $\beta = \frac{(a-d) - i(b+c)}{2}$, $\therefore |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$.

Así, $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ preserva el disco si y solo si $d=\bar{a}$, $c=\bar{b}$ y $|a|^2 - |b|^2 = 1$. (44)

Vamos otro método.

Nota 9. Si C es el círculo de radio 1 y $w \in D(0)$, se puede verificar que w y $\frac{1}{\bar{w}}$ son simétricos c.r.a C (puede usar la Prop 12 con $\tau(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ y el hecho que ~~se verifica~~ $\bar{\bar{z}} = z$ si $z \in C$), por el principio de simetría.

Ahora, si S preserva el disco y $z_0 \in D(0)$ es el cero de S , entonces z_0 y $\frac{1}{\bar{z}_0}$ son simétricos c.r.a C .

Por el Principio de Simetría, $S(z_0)$ y $S(\frac{1}{\bar{z}_0})$ son simétricos c.r.a C . Pero $S(z_0) = 0$, luego $S(\frac{1}{\bar{z}_0}) = \infty$, por la Nota 9.

Esto implica que $S(z) = \alpha \cdot \frac{z - z_0}{\bar{z}_0 \cdot z - 1}$, con $\alpha \in \mathbb{C}$.

Ahora, sea $w_0 \in C$ tal que $S(1) = w_0$. Se tiene que $w_0 = S(1) = \alpha \frac{1 - z_0}{\bar{z}_0 - 1}$.

Como $|w_0| = 1$ y $|\frac{1 - z_0}{\bar{z}_0 - 1}| = 1$, entonces $|\alpha| = 1$.

Concluimos que $S(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{\bar{z}_0 \cdot z - 1}$.

Nota 10. Acción geométrica de las transformaciones de Möbius.

Sea M de Möbius con dos puntos fijos α_1 y $\alpha_2 \in \mathbb{C}$.

Entonces, el conjunto de círculos que pasan por α_1 y α_2 , denotado $\bar{C}_1$, es llevado a el mismo, pues α_1 y α_2 deben permanecer fijos.

Consideremos la transformación $T(z) = \frac{z - \alpha_1}{z - \alpha_2}$, la cual lleva los círculos de $\bar{C}_1$ a rectas ~~que~~ que pasan por el origen, pues $T(\alpha_1) = 0$ y $T(\alpha_2) = \infty$.

(45)

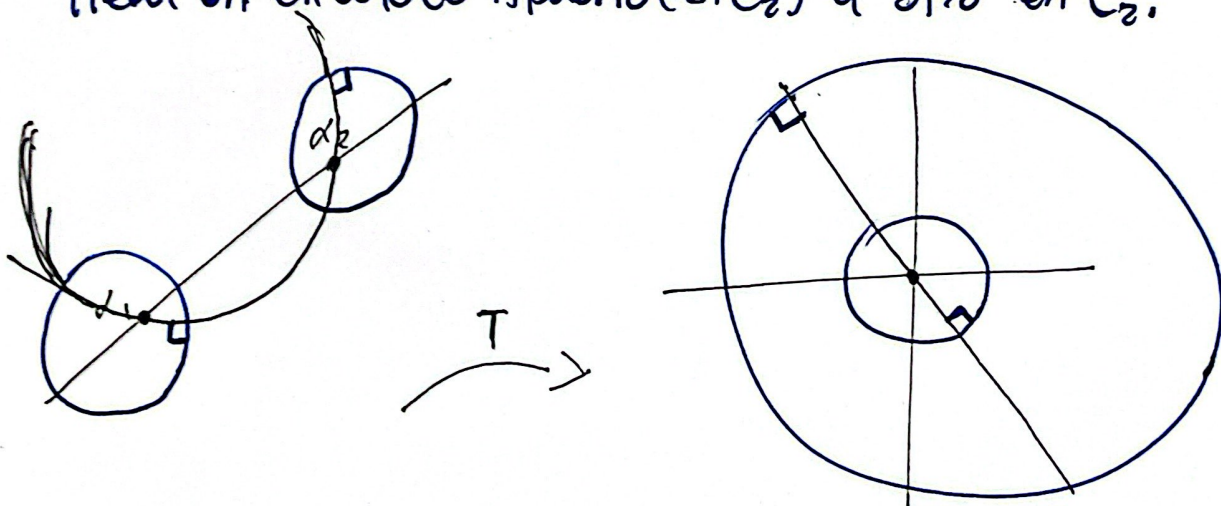
Denotamos dichas rectas como $\bar{A}_1$. Sean $\bar{A}_2$ los círculos centrados en el origen $\bar{A}_2 = \{z: |z|=r\}, r>0$. Observamos que los círculos

$C_r := \{z: \left| \frac{z-\alpha_1}{z-\alpha_2} \right| = r\}$ son llevados bajo T al círculo $\bar{A}_r$.

Sea $\bar{C}_r$ tales círculos, los cuales son llamados de Apolonia.

Los círculos de $\bar{A}_2$ intersecan a rectas de $\bar{A}_1$ formando ángulos de 90° . Así, como T es conforme, las intersecciones de círculos en $\bar{C}_1$ y $\bar{C}_2$ forman ángulos de 90° .

Finalmente, como M lleva un círculo de $\bar{C}_1$ a otro de $\bar{C}_1$, entonces lleva un círculo de Apolonia (en $\bar{C}_2$) a otro en $\bar{C}_2$.



Veamos ahora una simplificación de M . Sea T de Möbius que deja fijo a 0 y ∞ . Entonces $0 = \frac{b}{d}$ y $\infty = \frac{a+b}{c+d}$, lo cual implica que $b=c=0$ y $a \neq 0 \neq d$. Entonces $T(z) = \alpha \cdot z$, con $\alpha \in \mathbb{C}$.

Como $S := T \circ M \circ T^{-1}$ deja fijo a 0 y ∞ , entonces $S(z) = \beta \cdot z, \beta \in \mathbb{C}$.

Finalmente, pensemos que M tiene un solo punto fijo $\alpha \in \mathbb{C}$.

Un análisis similar usando $T(z) = \frac{1}{z-\alpha}$ nos dice que $S = T \circ M \circ T^{-1} = \frac{a}{z} + b$ con $b \neq 0$. En estos casos se dice que M y S son conjugados.

Def. 24.

(45)

i) $T(z) = e^{i\theta} \cdot z$ es elíptica.

ii) $T(z) = r \cdot z$, es hiperbólica.

iii) $T(z) = r \cdot e^{i\theta} z$, $r \neq 1$, $\theta \neq 0$, es loxodrómica.

iv) $T(z) = z + b$, $b \neq 0$, es parabólica.