

Integración compleja.



Integral de línea.

Sea $F: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vectorial y $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ una curva suave.

Se define el trabajo (o flujo) realizado por F a lo largo de γ como

$$\oint_{\gamma} F \cdot d\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k F_i(\gamma(t_i^{(n)})) \cdot (\gamma_j(t_{i+1}^{(n)}) - \gamma_j(t_i^{(n)})) = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt,$$

donde $\{t_i^{(n)}\}_{i=1}^n$ forman particiones de $[a, b]$.

Sea $F := (F_1, F_2)$ con $F_1, F_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. ~~Algunas veces~~ A F también se le denota como $F_1 dx + F_2 dy$, la se llama una forma diferencial.

Esta ~~defina~~ notación surge de

$$\int_{\gamma} F_1 dx + F_2 dy := \int_{\gamma} F d\gamma = \int_a^b \{ F_1(\gamma_1(t)) \gamma_1'(t) + F_2(\gamma_2(t)) \gamma_2'(t) \} dt,$$

para $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva suave.

Algunos resultados al respecto son:

i) Si hay $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que F es el gradiente de f , i.e. $\nabla f = F$ ($F_1 = \frac{df}{dx}, F_2 = \frac{df}{dy}$).

Entonces $\int_{\gamma} F d\gamma = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$ para cualquier curva suave γ .

ii) De manera recíproca a i), si $\int_{\gamma} F d\gamma$ es independiente de γ ,

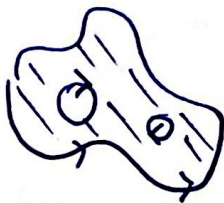
Entonces hay ~~ATA~~ f tal que $F = \nabla f$. (Potencial).

iii) (Teorema de Green) Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva suave y simple y cerrada ($\gamma(a) = \gamma(b)$) y D la región que enmarca γ . Sea $F = (F_1, F_2)$ un campo vectorial ^{continua y diferenciable}, entonces

$$\oint_{\gamma} F d\gamma = \iint_D \left(\frac{dF_2}{dx} - \frac{dF_1}{dy} \right) dy dx.$$

(18)

También se tiene una forma más general del teorema, con un conjunto de curvas, que forman la frontera de D . Cada curva γ_i orientada de tal manera $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ D está a mano izquierda.



Consideremos ahora $f := u + iv : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y $\gamma := (\gamma_1, \gamma_2) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ en el dominio de f . Podemos estudiar la integral compleja como

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(\gamma(t_j^{(n)})) \cdot [\gamma(t_j^{(n)}) - \gamma(t_{j-1}^{(n)})] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \{ u(t_j^{(n)}) + i v(t_j^{(n)}) \} \cdot [\Delta \gamma_1(t_j^{(n)}) + i \Delta \gamma_2(t_j^{(n)})] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{j=1}^n \{ u(t_j^{(n)}) \Delta \gamma_1(t_j^{(n)}) - v(t_j^{(n)}) \Delta \gamma_2(t_j^{(n)}) \} \right. \\ &\quad \left. + i \sum_{j=1}^n \{ v(t_j^{(n)}) \Delta \gamma_1(t_j^{(n)}) + u(t_j^{(n)}) \Delta \gamma_2(t_j^{(n)}) \} \right\} \\ &= \oint F d\gamma + i \oint G d\gamma, \text{ donde } F = (u, -v) \text{ y } G = (v, u). \end{aligned}$$

Y por el Teorema de Green, esto es

$$= \iint_D \left(\frac{d(-v)}{dx} - \frac{du}{dy} \right) dx dy + i \iint_D \left(\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} \right) dy dx.$$

Si f es holomorfa, por las ec. C.R. todo se anula.
con parciales continuas, etc.

Integración compleja

49

Def 24 Sea $A \subset \mathbb{C}$, $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ y $\gamma: [a, b] \rightarrow A$

Decimos que el valor $L \in \mathbb{C}$ es la integral de línea de f a lo largo de γ cuando se cumple lo siguiente:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \mid L - \sum_{i=1}^n f(\gamma(t_i)) \{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\} \mid < \varepsilon$$

para toda partición $\{t_i\}_{i=1}^n$ de $[a, b]$ con $\max_{1 \leq i \leq n} |t_i - t_{i-1}| < \delta$. Aquí $t_0 = a, t_n = b$

L es denotado $\int_{\gamma} f$ ó $\int_{\gamma} f(z) dz$. Cuando $|L| < \infty$ decimos que f es integrable a lo largo de γ .

Def 25, i) Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva. La variación de γ es

$$V(\gamma) := \sup_{\{t_i\}_{i=1}^n \in \Pi} \sum_{i=1}^n |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|,$$

donde Π es el conjunto de todas las particiones de $[a, b]$.

ii) Si $V(\gamma) < \infty$ decimos que γ es de variación acotada; también se dice rectificable.

Prop 14. i) γ es de variación acotada $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(\gamma)$ y $\operatorname{Im}(\gamma)$ son de var. acotada

ii) Si γ es suave a trozos (i.e. γ' es continua a trozos) entonces $V(\gamma) < \infty$.

Prop 15. Sea $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ y $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Si $V(\gamma) < \infty$ y $f \circ \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es continua, entonces f es integrable a lo largo de γ .

Dem. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ tal que si $|t-s| < \delta$ con $t, s \in [a, b]$, entonces $|f(\gamma(t)) - f(\gamma(s))| < \varepsilon / V(\gamma)$.

Así, tomemos dos particiones $\{t_j\}_{j=1}^n, \{s_i\}_{i=1}^m$ de $[a, b]$ tales que

$$\max |t_j - t_{j-1}| < \delta + \max |s_i - s_{i-1}| < \delta.$$

$$R := \left| \sum_{i=1}^n P(Y(t_i)) \cdot (Y(t_i) - Y(t_{i-1})) - \sum_{j=1}^m P(Y(s_j)) (Y(s_j) - Y(s_{j-1})) \right|$$

$$= \left| \sum_{k=1}^N [P(Y(r_k)) - P(Y(l_k))] \cdot (Y(t'_k) - Y(t'_{k-1})) \right|,$$

donde $\{t'_k\} = \{t_i\}_{i=1}^n \cup \{s_j\}_{j=1}^m$ es una nueva partición más fina de intervalo N .

Los valores r_k y l_k provienen de $\{t_i\}$ y $\{s_j\}$, respectivamente.

Por ejemplo, si $\{t_i, \dots, t_{i+d}\} \subset [s_{j-1}, s_j]$, entonces

$$P(Y(s_j)) (Y(s_j) - Y(s_{j-1})) = P(Y(s_j)) (Y(s_j) - Y(t_{i+d}) + \dots + Y(t_i) - Y(s_{j-1}))$$

$$= P(Y(s_j)) (Y(s_j) - Y(t_{i+d})) + \dots + P(Y(s_j)) (Y(t_i) - Y(s_{j-1}));$$

es decir, ~~repite~~ l_k repite el valor s_j .

Se sigue teniendo que $\max_k |t'_k - t'_{k-1}| < \delta$ y además $|r_k - l_k| < \delta$.

Entonces

$$R \leq \sum_{k=1}^N |P(Y(r_k)) - P(Y(l_k))| \cdot |Y(t'_k) - Y(t'_{k-1})| \leq \frac{\epsilon}{V(f)} \cdot V(f) = \epsilon.$$

Como $\mathbb{C}$ es completo, $L = \int_\gamma f$ existe.

Nota II. Si $f = u + iv$ y $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, se puede calcular $\int_\gamma f$ como

$$\int_\gamma u dx - v dy + i \int_\gamma v dx + u dy, \text{ donde}$$

$$\int_\gamma u dx - v dy = \int_a^b u(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) d\gamma_1(t) - \int_a^b v(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) d\gamma_2(t), \text{ similarmente para } i \int_\gamma v dx + u dy.$$

Aquí, $\int_a^b h(t) dt$ se entiende como la integral de Riemann-Stieltjes de h c.r.a. g .

Prop 16. i) Sean $f, g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma: [a, b] \rightarrow \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$ y $z \in \mathbb{C}$.
de var. acotada

Si $f \circ \gamma$ y $g \circ \gamma$ son continuas, entonces $\int_{\gamma} (zf + g) = z \int f + \int g$.

ii) Sean también $\beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, con $\beta(b) = \gamma(b)$, de variación acotada y tal que $f \circ \beta$ es continua. Entonces $\int_{\gamma} f + \int_{\beta} f = \int_{\beta} f$, donde $\beta = \gamma$ en $[a, b]$ y $\beta \neq \gamma$ en $[b, c]$.

iii) $\int_{\gamma} f = \int_{-\gamma} f$, donde $-\gamma(t) = \gamma(b - t + a)$.

Teo 29. Sea $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ continua y $\gamma: [a, b] \rightarrow A$ suave.

Entonces i) $\int_{\gamma} f = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$.

ii) $|\int_{\gamma} f| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| dt$.

i) Surge del Teo. del valor medio, i.e. $\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) = (t_i - t_{i-1}) \gamma'(s_i)$ con $s_i \in (t_{i-1}, t_i)$ y de la definición de la integral de Riemann.

ii) Notemos también que

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\gamma(t_i)) (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})) \right| \leq \sum_{i=1}^n |f(\gamma(t_i))| \cdot |\gamma'(s_i)| (t_i - t_{i-1}).$$

Cor 10. $|\int_{\gamma} f| \leq \max_{t \in [a, b]} |f(\gamma(t))| \cdot \underbrace{\int_a^b |\gamma'(t)| dt}_{\text{longitud}}.$

Lema 3. Sea $A \subset \mathbb{C}$ abierto y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ continua y $\gamma: [a, b] \rightarrow A$ rectificable.

Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\alpha: [a, b] \rightarrow A$ tal que coincide en los extremos con γ y $|\int_{\gamma} f - \int_{\alpha} f| < \varepsilon$.

(52)

Definición Sea D un disco abierto tal que $\bar{D} \subset A$.

Sea $\sigma: [a, b] \rightarrow D$ rectificable. Como f es uniformemente continua en $\bar{D}$, para $\epsilon > 0$ sea $\delta > 0$ tal que $|f(z) - f(w)| < \epsilon$ cuando $|z - w| < \delta$, con $z, w \in \bar{D}$. Como también σ es unif. continua, hay partición $\{t_0 < t_1 < \dots < t_n\}$ de $[a, b]$ tal que $|\sigma(s) - \sigma(t)| < \delta/2$ si $s, t \in [t_{n-1}, t_n]$, $n=1, 2, \dots, n$. (*)

y también tal que $\left| \int_a^b f - \sum_{n=1}^n f(\sigma(s_n))(\sigma(t_n) - \sigma(t_{n-1})) \right| < \epsilon$ (**)

para cualquier $s_n \in [t_{n-1}, t_n]$, $n=1, \dots, n$.

Definimos $\beta: [a, b] \rightarrow D$ como

$$\beta(t) := \frac{1}{t_n - t_{n-1}} \left\{ (t_n - t)\sigma(t_{n-1}) + (t - t_{n-1})\sigma(t_n) \right\}, \quad t \in [t_{n-1}, t_n].$$

Así, β es un polígono que une los nodos $\sigma(t_n)$, $n=1, \dots, n$.

Por (*), $|\beta(t) - \sigma(s_n)| < \delta$ si $t \in [t_{n-1}, t_n]$. (***)

Como $\int_a^b f = \int_a^b f(\beta(t))\beta'(t)dt$, se tiene que

$$\int_a^b f = \sum_{n=1}^n \frac{\sigma(t_n) - \sigma(t_{n-1})}{t_n - t_{n-1}} \cdot \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(\beta(t))dt.$$

$$\begin{aligned} \text{Usando (**), } \left| \int_a^b f - \sum_{n=1}^n f(\sigma(s_n))(\sigma(t_n) - \sigma(t_{n-1})) - \int_a^b f \right| \\ \leq \epsilon + \sum_{n=1}^n \frac{|\sigma(t_n) - \sigma(t_{n-1})|}{t_n - t_{n-1}} \cdot \int_{t_{n-1}}^{t_n} |f(\sigma(s_n)) - f(\beta(t))| dt. \end{aligned}$$

Por (***), $|\sigma(s_n) - \beta(t)| < \delta$, luego al evaluar en f la diferencia es menor a ϵ .

Así, $\int_a^b f - \int_a^b f \leq \epsilon + \epsilon \cdot V(\sigma).$

Tenemos el resultado para discos.

Como $\gamma([a,b])$ es compacto, $r := \text{dist}(\gamma([a,b]), A^c) > 0$.

Sea pues $\delta > 0$ tal que $|\gamma(s) - \gamma(t)| < r$ cuando $|s - t| < \delta$.

Sea $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ una partición de $[a,b]$ con $\max_{1 \leq i \leq n} |t_i - t_{i-1}| < \delta$,
por lo que $|\gamma(t) - \gamma(t_n)| < r$ para $t \in [t_{n-1}, t_n]$.

Definimos ahora $\gamma_n(t) = \gamma(t)$ para $t \in [t_{n-1}, t_n]$, $n = 1, 2, \dots, n$;

por lo que $\gamma_n([t_{n-1}, t_n]) \subset B_r(\gamma(t_n))$, $n = 1, \dots, n$.

Dado $\varepsilon > 0$, por la primera parte, hay polígonos $\beta_n: [t_{n-1}, t_n] \rightarrow B_r(\gamma(t_n))$

~~que coinciden en los extremos con γ_n~~ que coinciden en los extremos con γ_n , y tal que

$$\left| \int_{\gamma_n} f - \int_{\beta_n} f \right| < \varepsilon/n, \quad n = 1, \dots, n.$$

Por lo tanto, α definida como la unión de los polígonos $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ cumple lo deseado.

Teo 30. Sea $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua en el abierto $A \subset \mathbb{C}$, y

$\gamma: [a,b] \rightarrow A$ rectificable. Si hay $F: A \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que

$$F' = f \text{ entonces } \int_{\gamma} f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Dem. Si γ es suave, por el Teo 29, $\int_{\gamma} f = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$.

Luego, por la regla de la cadena $\int_{\gamma} f = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt$.

Ahora, usando el Teo. Fundamental del cálculo,

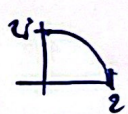
$$\int_{\gamma} f = \int_a^b [\text{Re}(F \circ \gamma)'(t) + i \text{Im}(F \circ \gamma)'(t)] dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Cuando γ es rectificable, por el lema 3, podemos aproximarla con polígonos, y surge el resultado.

Cor 1: Si $F: A \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y $\gamma: [a,b] \rightarrow A$ rectificable y cerrada, (54)
entonces $\int_{\gamma} F' = 0$,

~~Cor 2~~ ii) y si $F' = 0$, F es constante.

Para tener el Teorema de Cauchy, usando el Teorema de Green, se necesita asumir que F' es continua. Veremos el resultado sin asumir esto.

Ejemplo $L = \int_{\gamma} (z^2 - 3|z| + \operatorname{Im}(z)) dz$, con $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ 

$$L = \int_0^{2\pi} (4e^{2it} - 6 + 2\sin t) 2i e^{it} dt$$

$$= 2i \int_0^{2\pi} (4e^{3it} - 6e^{it} + 2\frac{e^{it} - 1}{2i}) dt = \dots, \quad \int_a^b e^{nit} dt = \frac{e^{(n+1)t}}{(n+1)i} \Big|_a^b$$

Teo 3.1 (de Cauchy) Sean $D := D_r(v_0) \subset \mathbb{C}$ y $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Se tiene que
~~Entonces~~ i) f tiene una antiderivada en D (Goursat).

ii) Si $\gamma: [a,b] \rightarrow D$ rectificable y cerrada, entonces $\int_{\gamma} f = 0$.

Dem. Usaremos el método de bisección de Goursat.

Sea β una curva que encierra un rectángulo $R \subset D$, con lados paralelos a los ejes coordenados y supongamos que $I = \left| \int_{\beta} f \right| \neq 0$. Sean ahora $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ curvas que encierran cuatro rectángulos del mismo tamaño, disjuntos cuya unión forma a R . Considerando que están orientadas de la misma manera tenemos que $I = \left| \sum_{i=1}^4 \int_{\sigma_i} f \right|$, por la Prop 6, ii).

Como $I \leq \sum_{i=1}^4 \left| \int_{\sigma_i} f \right|$, para al menos una curva, $I_1 := \left| \int_{\sigma_1} f \right| \geq \frac{I}{4}$.

Sea β_1 dicha curva. Volvemos a aplicar este procedimiento a β_1 para obtener una nueva curva β_2 tal que $I_2 := \left| \int_{\beta_2} f \right| \geq \frac{I_1}{4}$.

Haciendo esto sucesivamente tenemos $I_{n+1} = \left| \int_{\beta_{n+1}} f \right| \geq \frac{I_n}{4}$.

Además, $P_n := \text{perímetro}(\beta_n) = \frac{\text{perímetro}(\beta)}{2^n}$

$$\gamma \quad d_n := \text{diagonal}(\beta_n) = \frac{\text{diagonal}(\beta)}{2^n}, \quad n=1, 2, \dots$$

Por el Teorema de Cantor de Conjuntos anidados, la intersección de los rectángulos asociados a β_n es un punto $z_0 \in D$.

Usando que f es holomorfa en z_0 , dado $\varepsilon > 0$, hay $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad |z - z_0| < \delta.$$

Equivalentemente, $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon |z - z_0|$

Notemos que hay N_δ tal que si $n > N_\delta$, $\beta_n \subset D_\delta(z_0)$,
i.e. el rectángulo asociado a β_n está contenido en $D_\delta(z_0)$.

Ahora, por el Teo 30, ~~por el Teo 30~~, $\int_{\beta_n} 1 dz = 0$ y $\int_{\beta_n} z dz = 0$.

Así, para $n > N_\delta$, usando el Teo 29,

$$\begin{aligned} I &\leq 4^n \cdot I_n = 4 \cdot \left| \int_{\beta_n} f \right| = 4^n \cdot \left| \int_{\beta_n} (f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)) dz \right| \\ &\leq 4^n \cdot \int_0^1 |f(\beta_n(t)) - f(z_0) - f'(z_0)(\beta_n(t) - z_0)| \cdot |\beta_n'(t)| dt \\ &\leq 4^n \cdot \varepsilon \cdot \max_t |\beta_n(t) - z_0| \cdot \int_0^1 |\beta_n'(t)| dt \leq 4^n \cdot \varepsilon \cdot d_n \cdot P_n = \\ &= \varepsilon \cdot \text{diagonal}(\beta) \cdot \text{perímetro}(\beta). \end{aligned}$$

Concluimos que $I = 0$, pues $\varepsilon > 0$ es arbitrario.

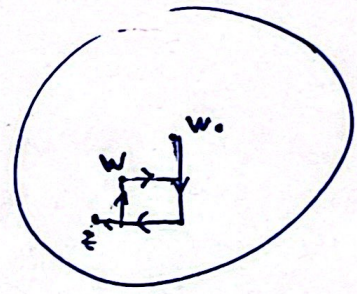
i) Sea $z \in D$ y $P(w_0, z)$ un polígono que une w_0 y z mediante dos segmentos, el primero paralelo al eje y y el segundo paralelo al eje x , con la orientación $w_0 \rightarrow z$.

Como f es continua, dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ tal que

$$(\forall w \in B_\delta(z)) |f(z) - f(w)| < \varepsilon. \quad (*)$$

Sea pues $w \in B_\delta(z)$ y notemos que

$$\int_{P(w_0, z)} f = \int_{P(w_0, w)} f + \int_{P(w, z)} f + \int_{\gamma} f,$$



donde γ es el polígono que enmarca el rectángulo con vértices w y $(\operatorname{Re}(w), \operatorname{Im}(z))$, con orientación $w_0 \rightarrow z$.

Vemos que todo está contenido en D . En particular, por la primera parte

$$\int_{\gamma} f = 0. \text{ Luego } F(z) = F(w) + \int_{P(w, z)} f. \text{ Usando que } \text{longitud}(P(w, z)) \leq 2|z - w|,$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z) - F(w)}{z - w} - f(z) \right| &= \frac{1}{|z - w|} \cdot |F(z) - F(w) - f(z)(z - w)| = \frac{1}{|z - w|} \left| \int_{P(w, z)} f - f(z)(z - w) \right| \\ &= \frac{1}{|z - w|} \left| \int_{P(w, z)} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta \right| = \frac{1}{|z - w|} \left| \int_{P(w, z)} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta \right| \\ &\leq \frac{1}{|z - w|} \int_0^1 |f(P(w, z)(t)) - f(z)| \cdot |P'(w, z)(t)| dt \stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{|z - w|} \varepsilon \cdot \text{longitud}(P(w, z)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{|z - w|} \cdot 2|z - w| = 2\varepsilon. \text{ Concluimos que } F' = f. \end{aligned}$$

ii) Por el Teo 30, $\int_{\gamma} f = 0$.