

Tarea 2 de Variable Compleja

CINVESTAV

Profesor: Carlos G. Pacheco.

Semestre: enero- junio 2026.

1. Sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ una sucesión para la cual

$$|z_n - z_m| < \frac{1}{1 + |n - m|}, \text{ para todo } n, m.$$

- 1) Demuestre que esta sucesión converge.
- 2) ¿ Se podrá decir cuál es el límite?
- 3) ¿Qué más puede usted decir de esta sucesión?

2. Encuentre el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z}{\frac{1}{n} + z}$ con $z \in \mathbb{C}$.

3. Sean $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones en $\mathbb{C}$. Demuestre que si $z_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ y $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un conjunto acotado, entonces $z_n w_n \rightarrow 0$.

4. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ con $|z_1| < 1$ y $|z_2| < 1$. Demostrar que

$$(\forall z \in D \text{ con } |z| \neq 1)(\exists K < \infty) \frac{|1 - z|}{1 - |z|} \leq K,$$

donde D es el triángulo cerrado enmarcado por $[1, z_1, z_2, 1]$. Determine el valor más pequeño de K cuando $z_1 = \frac{1+i}{2}$ y $z_2 = \frac{1-i}{2}$

5. Sean $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos compacto en $\mathbb{C}$ tales que $A_{n+1} \subset A_n$ para $n = 1, 2, \dots$. Demostrar que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ es no vacío.