

Tarea 4 de Variable Compleja

Profesor: Carlos G. Pacheco.

Semestre: enero- junio 2026.

1. Demostar que si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tiene radio de convergencia ρ , entonces $S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es continua en $\{z : |z| < \rho\}$.

2. Determine el radio de convergencia de las siguientes series de potencias,

$$i) \sum n^n z^n \quad ii) \sum n^\alpha z^n, \alpha \in \mathbb{R} \quad iii) \sum \frac{n!}{n^n} z^n \quad iv) \sum z^{n!}$$

3. Encuentre el disco de convergencia de

$$\sum \frac{(-1)^n}{n} z^{n(n+1)},$$

y diga que pasa si $z = 1$ o $z = -1$.

4. Encuentre el radio de convergencia de

$$\sum 4^n z^{3n} \text{ y } \sum 4^{n(-1)^n} z^n.$$

5. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^+$ decreciente tal que $a_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Prube que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ es uniformemente convergente en

$$D := \{z : |z| \leq 1\} \bigcap \{z : |z - 1| \geq \delta\}$$

con $\delta > 0$ fija.