

Tarea 5 de Variable Compleja

Profesor: Carlos G. Pacheco.

Semestre: enero- junio 2026.

1. Considere

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3^n} - z^{2 \times 3^n}}{n}.$$

- i) Explique porque f es una serie de potencias, es decir, determine cuales son los coeficientes a_n .
- ii) Determine el radio de convergencia.
- iii) Explique que ocurre con $\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k)$ cuando $z_k = e^{i\theta_k} = \cos(\theta_k) + i \sin(\theta_k)$, donde $\theta_k = \pi/3^k$.
- iv) Proponga una sucesión z_k tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = 1$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = f(1)$.

2. Sea $r \in [0, 1)$, demostrar que

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n\theta) = \frac{1}{2} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta) + r^2}.$$

3. Sea $k \in \mathbb{N}$ fija. Demuestre que las series

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} n^k a_n z^n, \quad ii) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1},$$

tienen el mismo radio de convergencia que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

4. Determine el radio de convergencia de $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ y pruebe que se satisface $f''(z) = f(z)$ para todo z en el disco de convergencia.

5. Sean f y g dos series de potencias con radio de convergencia estrictamente mayor a cero tales que $f(0) = g(0) = 0$ y $g'(0) \neq 0$. Demuestre la regla de l'Hopital

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}.$$

6. ¿Habr  alguna función holomorfa $f := u + iv$ tal que $u(x, y) = e^x$ o $u(x, y) = e^x(x \cos(y) - y \sin(y))$?

7. Sea

$$f(z) := \begin{cases} z^5 |z|^{-4} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Demuestre que la parte real e imaginaria satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $z = 0$, pero no es diferenciable en $z = 0$.

Sugerencia: Considere $f(h)$ y $f(ih)$ con $h \in \mathbb{R}$ para encontrar las parciales, y la trayectoria $1 + ih$ para ver que la derivada cambia.

8. Demuestre que para cualquier par $z, w \in \mathbb{C}$,

- i) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$,
- ii) $\cos(z + w) = \cos(z) \cos(w) - \sin(z) \sin(w)$
- iii) $\cos z + i \sin z = e^{iz}$,
- iv) $\sin(-z) = -\sin(z)$.

9. i) Argumente porque

$$\text{Log}(1 + z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k} \text{ cuando } |z| < 1.$$

- ii) Demuestre que, para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z.$$

10. Para funciones complejas holomorfas, demuestre que se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Rimann en coordenadas polares.

11. Encuentre las soluciones de la ecuación $z^{1+i} = 4$.

12. Defina en $\mathbb{C}$ la inversa de la función *sen*.

Sugerencia: resuelva una expresión cuadrática de la forma $e^{2iz} - 2iwe^{iz} - 1 = 0$.

13. ¿Existe un $z \in \mathbb{C}$ para el cual las siguientes series,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right)^n (z - 2)^n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n} \right)^n (z + 2)^{n+1},$$

sean ambas convergentes?