Tarea 6 de Variable Compleja

CINVESTAV

Profesor: Carlos G. Pacheco.

Semestre: enero- junio 2026.

1. Para que valores z la siguiente serie converge:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{1-z^k}.$$

2. ¿Existe alguna función analítica con parte real $e^{y/x}$?

3. Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. De condiciones sobre h para que esta sea la parte real de una función holomorfa, i.e . $u(x, y) = h(x)$.

4. ¿Dónde es conforme $\sin(z)$?.

5. ¿Es $f(z) = \bar{z}$ holomorfa?, ¿es conforme?.

6. Sea $A \subset \mathbb{C}$ un abierto. Decimos que $u : A \mapsto \mathbb{R}$ es **armónica** si

$$\nabla^2 u(x, y) := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

para toda $(z, y) \in A$.

i) Demuestre que la parte real e imaginaria de una función holomorfa son armónicas.

ii) Si f es holomorfa, ¿es $|f(z)|$ es armónica?

7. Construya una función holomorfa h en $A := \{z : R(z) < 0\}$, tal que $h(A) = \{z : |z| > 1\}$.

8. Construya una función conforme que lleve $A := \{z : |z| \leq 1, Im(z) \geq 0\}$ a $B = \{z : Re(z) \geq 0, Im(z) \geq 0\}$.

9. Proponga una caracterización de las tranformaciones de Möbius que llevan el interior del disco unitario a su exterior.

10. Demuestre que z y $1/\bar{z}$ son simétricos con respecto al círculo unitario.

11. Demuestre el Principio de Orientación (Teorema 28 de las notas).

12. Verifique las Notas 8 y 9 de las notas.

13. Sean T y S transformacione de Möbius, y suponga que existe otra ϕ transformación de Möbius tal que $S = \phi \circ T \circ \phi^{-1}$. Demuestre que $w \in \hat{\mathbb{C}}$ es punto fijo de T si y solo si $\phi(w)$ es punto fijo de S

14. Sea M una transformación de Möbius con dos puntos fijos α_1 y α_2 en $\mathbb{C}$. Suponga que M es conjugada a la transformación loxodrómica $T(z) = wz$. Explique que ocurre sobre la esfera de Riemann con la sucesión $M^n(z_0)$, $n = 1, 2, \ldots$ para algun punto $z_0 \in \mathbb{C}$ arbitrario.

15. Sean T y S dos transformaciones de Möbius conjugadas, i.e existe transformación de Möbius ϕ tal que $S = \phi \circ T \circ \phi^{-1}$, Si $n \in \mathbb{N}$, ¿son T^n y S^n conjugadas?