Tarea 7 de Variable Compleja

CINVESTAV

Profesor: Carlos G. Pacheco.

Semestre: enero- junio 2026.

1. Calcule $\int_\gamma f$ con $\gamma := [1-i, 1+i, i-1, -i-1, 1-i]$ y $f(z) := 1/z$.

2. Sea $F : [0,1] \to [0,1]$ la función de Cantor. Vea que la curva $\gamma(t) := F(t)+iF(t)$, $t \in [0,1]$, no es suave a trozos pero es de variación acotada. ¿Cómo se ve la curva en $\mathbb{C}$?, ¿cuánto vale $\int_\gamma$ o $\int_\gamma z$?

3. Sean $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ las circunferencias con centros $\frac{1-i}{2}$, $\frac{1+i}{2}$, $\frac{i-1}{2}$ y $\frac{-1-i}{2}$, respectivamente y todos con radio $1/4$, y sea $\gamma := [1-i, 1+i, i-1, -i-1, 1-i]$. Suponga que hay un disco $A \subset \mathbb{C}$ suficientemente grade que contiene a todas las curvas anteriores. Si $f : A \to \mathbb{C}$ es holomorfa, demuestre que
$$\int_\gamma f = \sum_{i=1}^{4} \int_{\sigma_i} f.$$

4. Dé una expansión en series de potencias alrededor de 1 de $1/z^3$, y diga cual es el radio del disco más grande donde esto ocurre.

5. Sea u una función real valuada y armónica (ver Tarea 6, problema 6) en $B_r(z_0) \subset \mathbb{C}$. Demuestre que para todo $r_0 \in (0, r)$
$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r_0 e^{i\theta}) d\theta.$$

6. Sea $A \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo. Sea $f : A \to \mathbb{C}$ holomorfa y no constante. Demuestre que si $z_0 \in A$ es tal que $f(z_0) = 0$, entonces hay $g : A \to \mathbb{C}$ holomorfa y $n \in \mathbb{N}$ tal que $(\forall z \in A) f(z) = g(z)(z - z_0)^n$ con $g(z_0) \neq 0$.

7. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera y suponga que hay constantes $M, r > 0$ y un entero $n \geq 1$ tal que $(\forall z \notin B_r(0))|f(z)| \leq M|z|^n$. Muestre que f es un polinomio de grado a lo más n.

8. i) La regla de Leibniz dice los siguiente:

   Proposición Si $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{C}$ es una función continua, entonces $g(t) := \int_a^b f(s, t) ds$ es continua en $[c, d]$. Pero si además $\frac{df}{dt}$ existe y es continua en $[a, b] \times [c, d]$, entonces g es diferenciable y $g'(t) = \int_a^b \frac{df}{dt}(s, t) ds$.

   Use este resultado para probar que
   $$\int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is} - tz} ds$$
   es constante si $|z| < 1$, y use esto para concluir que $\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = 2\pi i$.

   ii) Demostrar la regla de Leibniz compleja.

9. Calcule:

   1) $\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2} dz$ con $\{\gamma(t) := e^{it}\}_{t \in [0, 2\pi]}$,
   2) $\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$ con $\{\gamma(t) := z_0 + e^{it}\}_{t \in [0, 2\pi]}$,
   3) $\int_\gamma \frac{\sin(z)}{z^3} dz$ con $\{\gamma(t) := e^{it}\}_{t \in [0, 2\pi]}$,
   4) $\int_\gamma \frac{Log(z)}{z^n} dz$ con $\{\gamma(t) := 1 + \frac{e^{it}}{2}\}_{t \in [0, 2\pi]}$ y n entero no negativo.
   5) $\int_\gamma \frac{dz}{z^2 + 1}$ con $\gamma := \{2|\cos(2t)|e^{it}, t \in [0, 2\pi]\}$.
   6) $\int_\gamma \frac{e^z - e^{-z}}{z^n} dz$ con $\{\gamma(t) := e^{it}\}_{t \in [0, 2\pi]}$ y n entero positivo,
   7) $\int_\gamma \frac{dz}{(z - 1/2)^n}$ con $\{\gamma(t) := \frac{1}{2} + e^{it}\}_{t \in [0, 2\pi]}$ y n entero positivo,
   8) $\int_\gamma \frac{\sin(z)}{z} dz$ con $\{\gamma(t) := e^{it}\}_{t \in [0, 2\pi]}$.
   9) $\int_\gamma \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz$ para cada $n \in \mathbb{N}$ donde $\gamma := \{1 + e^{it}, t \in [0, 2\pi]\}$.

10. En $\mathbb{C}$, dé un ejemplo de una curva cerrada γ de variación acotada tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ existe z fuera de la imagen de γ con $I(\gamma, z) = k$.

11. Sea p un polinomio complejo de grado n y sea $\gamma := \{re^{it}, t \in [0, 2\pi]\}$ tal que $(\forall z \notin B_r(0))p(z) \neq 0$. Demuestre que

$$\int_\gamma \frac{p'(z)}{p(z)} dz = 2\pi i n.$$

12. Sean $A \subset \mathbb{C}$ abierto y $f, g : A \to \mathbb{C}$ analíticas con g inyectiva y tal que $g'(z) \neq 0$ para toda $z \in A$. Sea γ un ciclo en A homólogo a cero en A. Demuestre que para z_0 en A pero fuera de la imagen de γ,

$$I(\gamma, z_0) f(z_0) = \frac{g'(z_0)}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{g(z) - g(z_0)} dw.$$

Sugerencia: Aplique el teorema de la integral de Cauchy a

$$h(z) = \begin{cases} \frac{f(z)(z-w)}{g(z)-g(w)} & z \neq w \\ \frac{f(z)}{g'(z)} & z = w. \end{cases}$$

13. Sea $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ una curva cerrada y simple; y sean $z_1, \ldots, z_n$ puntos diferentes en $\mathbb{C}$ pero contenidos en la componente acotada de $\mathbb{C} - \{\gamma([0, 1])\}$. Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es entera, dé una fórmula para calcular

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{\prod_{k=1}^n (z - z_k)} dz.$$

Sugerencia: construya un ciclo homólogo a cero en cierto conjunto abierto, y use los teoremas de Cauchy y la fórmula integral de Cauchy.

14. **1.** Identifique y clasifique las singularidades de la siguiente función compleja

$$\frac{(z-1)^2(z+3)}{1 - \sin(\pi z/2)}.$$

15. Identifique y clasifique las singularidades de la siguiente función compleja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}.$$

16. ¿Puede ser un polo de una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una singularidad removible?

17. Encuentre la series de Laurent de la función

$$\frac{1}{z(z-1)}$$

en $Ann(0,0,1)$ y en $Ann(0,1,\infty)$.

18. Encuentre la serie de Laurent de $\frac{1}{(z-1)^2(z+1)^2}$ en $Ann(0,1,2)$.

19. Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin(x)}{x^4+16} dx.$$

20. Demuestre que

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{1/3}}{x^2+4x+8} dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \frac{\sin(\pi/12)}{\sin(\pi/3)}.$$

21. Calcule

$$\int_0^{\infty} \frac{x^p}{1+x^2} dx, \ p \in (-1,1).$$

22. Recuerde que $\tan(z) = \sin(z)/\cos(z)$ y $\cot(z) = 1/\tan(z)$.

i) Muestre que los polos de $f(z) := \pi\cot(\pi z)$ son el conjunto $\mathbb{Z}$ y que los correspondientes residuos son todos el valor 1.

ii) Sea γ_N la curva dada por el cuadrado con vértices $\{i(N+1/2)+j(N+1/2);\ i,j = 1,-1\}$ con $N \in \mathbb{N}$. Muestre que

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\gamma_N} \frac{f(z)}{z^2} dz = 0.$$

iii) Use el Teorema del Residuo para concluir que $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \pi^2/6$.