Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN

Departamento de Matemáticas

Ecuaciones Diferenciales e Integrales

Carlos G. Pacheco

October 5, 2023

Índice General

Capítulo 1

Espacios Lineales y Transformaciones

En este capítulo el lector encontrará los conceptos de espacios lineales y operadores, y su desarrollo en el ámbito de espacios de funciones. Además se desarrollan las primeras técnicas, como el Teorema de Neumann o el de contracciones de Banach, para estudiar ecuaciones diferenciales e integrales.

1.1 Espacios lineales normados

Los siguientes axiomas surgen como extención de la estructura de un espacio euclidiano.

Definición 1.1.1. Un **espacio vectorial** (o **espacio lineal**) sobre un campo $\mathbb{K}$ (e.g. $\mathbb{R}, \mathbb{C}$) es un conjunto X junto con dos funciones

$$(x, y) \mapsto x + y, \quad (\lambda, y) \mapsto \lambda x,$$

para todos $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, tales que cumplen lo siguiente:
(i) $(\forall x, y, z \in X)\ (x + y) + z = x + (y + z)$ (ley asociativa),
(ii) $(\forall x, y \in X)\ x + y = y + x$ (ley conmutativa),
(iii) $\exists\ 0 \in X$ tal que $(\forall x \in X)\ x + 0 = x$ (existencia del neutro aditivo),
(iv) $(\forall x \in X)(\exists z \in X)\ x + z = 0$ (existencia de inversos),
a tal z lo denotamos $-x$,
(v) $(\forall \lambda \in \mathbb{K})(\forall x, y \in X)\ \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (ley distributiva),
(vi) $(\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K})(\forall x \in X)\ (\lambda + \mu)x = \lambda + \mu x$ (ley distributiva),
(vii) $(\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K})(\forall x \in X)\ \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ (ley asociativa), y
(viii) $(1 \in \mathbb{K})(\forall x \in X)\ 1x = x$.

Nota 1.1.2. Un campo $\mathbb{K}$ es un anillo conmutativo con división.

Ejemplo 1.1.3.

(i) El espacio $\mathbb{C}^n$ de vectores en $\mathbb{C}$,

$$\{(t_i)_{i=1}^n : \ t_i \in \mathbb{C}\}.$$

Se puede verificar que $\mathbb{C}^n$ es un espacio vectorial con las operaciones naturales de suma y multiplicación por escalar. También es válido cuando $n = \infty$, es decir $\mathbb{C}^\infty$ denota el espacio de sucesiones en $\mathbb{C}$. Similarmente podemos formar espacios lineales por medio del espacio de matrices.

(ii) El espacio

$$\left\{t \in \mathbb{C}^\infty : \ \lim_{n\to\infty} t_n \text{ existe}\right\}.$$

(iii) El espacio

$$l_2 := \left\{t \in \mathbb{C}^\infty : \ \sum_{k=1}^{\infty} |t_k|^2 < \infty\right\}.$$

(iv) El espacio de funciones

$$\mathbb{C}^E := \{f : E \to \mathbb{C}\},$$

con E cualquier conjunto. Notemos que $\mathbb{C}^\infty = \mathbb{C}^E$ con $E := \{1, 2, \ldots\}$.

(v) Si E es un espacio topológico, entonces el espacio de funciones continuas,

$$C(E) := \left\{f \in \mathbb{C}^E : f \text{ es continua}\right\},$$

es lineal.

(vi) El espacio de funciones r veces diferenciables,

$$C^r([0,1]) := \left\{f \in C([0,1]) : d^k f/dx^k \text{ existe para } k = 1, 2, \ldots, r\right\}.$$

Definición 1.1.4. Un **subespacio vectorial** de X es $X_0 \subseteq X$, $X_0 \neq \emptyset$, tal que

$$(\forall x, y \in X_0)(\forall \lambda \in \mathbb{K}) \ x + \lambda y \in X_0.$$

Cuando $X_0 \subsetneq X$ estrictamente decimos que es un **subespacio propio**.

En los ejemplos anteriores encontramos muestras de subespacios lineales.

Ahora estudiaremos el concepto de subespacio generado. La demostración del siguiente resultado se deja al lector.

Proposición 1.1.5. *Toda intersección de subespacios vectoriales es un subespacio vectorial.*

Definición 1.1.6. Sea $A \subseteq X$. El subespacio $\langle A\rangle$ **generado** por A es la intersección de todos los subespacios vectoriales que contienen a A.

Nota 1.1.7. El conjunto vacío genera el espacio que consta únicamente del neutro aditivo, i.e. $\langle\emptyset\rangle = \{0\}$.

Definición 1.1.8. Una **combinación lineal** (comb.lin.) en $A \subseteq X$ es una suma *finita* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ con $\{x_i\} \subseteq A$ y $\{\lambda_i\} \subseteq \mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, n$).
(Nota: A no tiene que ser finito.)

Resulta que el generado y las combinaciones lineales son lo mismo; el lector puede mostrar el siguiente teorema.

Teorema 1.1.9. *Se tiene que* $\{$*combinaciones lineales de* $A\} = \langle A \rangle$.

Ejemplo 1.1.10. Sea $\mathbb{C}^n$ el subconjunto de elementos $(x_i) \in \mathbb{C}^\infty$ tales que $x_i = 0$ para $i > n$. Entonces el subespacio $\langle \mathbb{C}^0 \cup \mathbb{C}^1 \cup \mathbb{C}^2 \cup \cdots \rangle$ no es igual a $\mathbb{C}^\infty$.

Definición 1.1.11. Un conjunto A es **linealmente independiente** (lin.ind.) si la condición

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0, \text{ con } \{x_i\} \subseteq A, \text{ y } x_i \neq x_j \text{ cuando } i \neq j,$$

implica que $\lambda_i = 0$ para $i = 1, \ldots n$.

Definición 1.1.12.
(i) Una **base** (**de Hamel**) de X es un subconjunto A de X que es lin.ind. maximal. Así, cualquier $x \in X$ es una única combinación lineal finita de elementos de A, por lo que $X = \langle A \rangle$.
(ii) Si X tiene una base finita A, el número de elementos de A es la **dimensión** de X. La dimensión es infinita si no hay una base finita.

Nota 1.1.13. Para determinar la existencia de una base en un espacio lineal se ocupa el **Lema de Zorn**, el cual a su vez se muestra asumiendo el **Axioma de Elección**. En general no es fácil caracterizar bases de Hamel explicitamente, y existen ejemplos donde dicha base resulta ser un conjunto que no es Lebesgue medible.

Definición 1.1.14.
(i) Sean X y Y espacios vectoriales sobre el mismo campo $\mathbb{K}$. Una función $f : X \to Y$ es **lineal** si

$$(\forall x_1, x_2 \in X)(\forall \lambda \in \mathbb{K}) f(\lambda x_1 + x_2) = \lambda f(x_1) + f(x_2).$$

(ii) Denotamos $\mathcal{L}^{\#}(X, Y) := \{f : X \to Y \text{ lineales}\}$ (simplemente $\mathcal{L}^{\#}(X)$ cuando $Y = X$) el conjunto de **funciones** lineales y $X^{\#} := \mathcal{L}^{\#}(X, \mathbb{K})$ el conjunto de **funcionales** lineales.

Ejemplo 1.1.15.
(i) Sea $X := C[0, 1]$. El operador $T : X \to \mathbb{R}$, definido como $T(x) := \int_0^1 x(t)dt$ para $x \in X$, es lineal. También escribimos simplemente Tx.

(ii) Sea $X := \{f : [0,1] \to \mathbb{R}$ n veces diferenciables $\}$, y sean $y_0, y_1, \ldots, y_n$ en X. El operador

$$D(x) := \sum_{k=0}^{n} y_k x^{(k)}, \text{ con } x^{(k)} \text{ la } k\text{−ésima derivada,}$$

define una funcion lineal de X a $\{f : [0,1] \to \mathbb{R}\}$.
(iii) Si $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces

$$x \mapsto \int_0^1 k(s,t)x(s)ds$$

define un operador lineal $T : X \to X$, al cual llamamos **operador integral** y a k le llamamos su **núcleo** o **kernel**.
(iv) La **transformada de Laplace**

$$(Tx)(s) := \int_0^\infty e^{-st}x(t)dt$$

es lineal.

La siguiente proposición, cuya prueba queda al lector, nos muestra de manera más explicita la estructura de cualquier funcional lineal.

Proposición 1.1.16. *Supongamos que* $n := \dim(X) < \infty$ *y que* $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ *es una base de* X*. Entonces para cada* $f \in X^{\#}$ *hay únicos* $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\} \subset \mathbb{K}$ *tales que*

$$(\forall x \in X) \;\; f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i \;\; \textit{donde } x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i.$$

De hecho, $\mu_i = f(b_i), \; i = 1, \ldots, n$.

Un análogo en dimensión infinita de este resultado es el Teorema de representación de Riesz que veremos posteriormente.

Definición 1.1.17.
(i) Sea X un espacio lineal. Una **norma** en X es una función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ tal que
a) $\|x\| \geq 0$,
b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,
d) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.
(ii) A $(X, \|\cdot\|)$ se le llama un **espacio lineal normado** (ELN).
(iii) Si además $(X, \|\cdot\|)$ es completo (i.e. toda sucesión de Cauchy es convergente), entonces se le llama **espacio de Banach**.

Proposición 1.1.18. *Sea* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$*. El espacio* $X := C[a,b]$*, con la norma* $\|x\|_\infty := \max_{t \in [a,b]} |x(t)|$*, es de Banach.*

Demostración. Se puede ver que X es lineal y que $\|\cdot\|_\infty$ es norma. Probemos que X es completo. Sea $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\} \subset X$ es sucesión de Cauchy. Para cualquier $t \in [a, b]$, tenemos que $|x_n(t) - x_m(t)| \leq \|x_n - x_m\|_\infty$, por lo que $\{x_n(t)\}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$, luego $\lim_{n\to\infty} x_n(t)$ existe para cada $t \in [a, b]$. Definamos $(\forall t \in [a, b]) x(t) := \lim_{n\to\infty} x_n(t)$ y probemos que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ con la norma en X y que $x \in X$.

Sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Sea N entero tal que $\|x_n - x_m\|_\infty < \epsilon/3$ cuando $n, m > N$. Así pues, $(\forall s \in [a, b])(\forall n, m > N)|x_n(s) - x_m(s)| < \epsilon/3$. Tomando el límite cuando $m \to \infty$ obtenemos que $(\forall s \in [a, b])|x_n(s) - x(s)| \leq \epsilon/3$, en otras palabras $(\forall n > N)\|x_n - x\|_\infty \leq \epsilon/3$. Por lo tanto $\|x_n - x\|_\infty \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Como x_N es continua y $[a, b]$ es cerrado, x_N es uniformemente continua, i.e. existe $\delta > 0$ tal que $|x_N(t) - x_N(s)| \leq \epsilon/3$ cuando $|s - t| < \delta$. Por la desigualdad del triangulo

$$|x(s) - x(t)| \leq |x(s) - x_N(s)| + |x_N(s) - x_N(t)| + |x_N(t) - x(t)|,$$

por lo que podemos concluir que $|x(s) - x(t)| < \epsilon$ cuando $|s - t| < \delta$, por lo tanto x es continua. □

Cuando A es un espacio topológico, se puede extender este resultado a funciones $f : A \to \mathbb{R}$ continuas y que además son acotadas con la norma del supremo.

Nota 1.1.19. Usando la norma $\|x\|_2 := \sqrt{\int_a^b x^2(t)dt}$, el espacio $C([a, b])$ no es completo.

1.2 Operadores lineales

Definición 1.2.1. Sean X y Y espacios lineales normados.
(i) Una transformación (operador) lineal $T \in \mathcal{L}^\#(X, Y)$ se llama **acotada** si

$$\|T\| := \sup_{x \in X - \{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} < \infty.$$

(ii) El conjunto de **transformaciones lineales acotadas** de X a Y lo denotamos como $\mathcal{L}^*(X, Y)$. Si $Y = X$, escribimos $\mathcal{L}^*(X)$.
(iii) Para $A, B \in \mathcal{L}^\#(X)$, AB significa la composición de A con B. También usamos $I : X \to X$ para denotar la identidad.

Proposición 1.2.2. *Se tiene lo siguiente:*
(i) $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|$.
(ii) Para todo $x \in X$, $\|T(x)\| \leq \|T\| \, \|x\|$.
(iii) Si $X = Y$, $\|T^n\| \leq \|T\|^n$, *donde* T^n *es la* $n-$*ésima composición de* T.

Teorema 1.2.3. *Sean* X, Y *ELNs. Se tiene que* $T \in \mathcal{L}^\#(X, Y)$ *es acotado si y solo si* T *es un mapeo continuo.*

Demostración. Si T es continua, en particular es continua en $0 \in X$ (neutro de X). Luego

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)\|x - 0\| \leq \delta \Rightarrow \|T(x) - T(0)\| \leq \epsilon;$$

en particular para $\epsilon = 1$. Si $x \in X$ es de norma 1, $\|\delta x\| = \delta$, luego $\|T(\delta x)\| \leq 1$. Así, $\|Tx\| \leq 1/\delta < \infty$ para todo x de norma 1, por la proposición anterior T es acotado.

Supongamos que T es acotado. Tenemos que hay $M < \infty$ tal que para todo $x, y \in X$ con $x - y \neq 0$

$$\frac{\|T(x-y)\|}{\|x-y\|} \leq M.$$

Luego $\|T(x) - T(y)\| \leq M\|x - y\|$, por lo tanto T es continua. □

Ejemplo 1.2.4. Un operador integral en $(C[0,1], \| \bullet \|_\infty)$ donde el núcleo $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{K}$ es función continua define un operador acotado.

Teorema 1.2.5. *Sea X ELN y Y espacio de Banach. Entonces $\mathcal{L}^*(X,Y)$ es de Banach.*

Demostración. Sean $T_1, T_2 \in \mathcal{L}^*(X,Y)$, entonces

$$\|T_1 + T_2\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_1(x) + T_2(x)\| \leq \sup_{\|x\|=1} (\|T_1(x)\| + \|T_2(x)\|) \leq \|T_1\| + \|T_2\|,$$

y también $\|\lambda T_1\| = |\lambda|\|T_1\|$. Claramente $\|T\| = 0$ si $(\forall x \in X)T(x) = 0 \in Y$; y si $\|T\| = 0$ entonces $(\forall x \in X)\|T(x)\| = 0$, lo cual implica que $(\forall x \in X)T(x) = 0$, pues $\| \cdot \|$ es norma en Y. Hemos pues mostrado que la función $\| \cdot \|$ en $\mathcal{L}^*(X,Y)$ es efectivamente una norma.

Se puede ver fácilmente que $\mathcal{L}^*(X,Y)$ es espacio lineal. Verifiquemos entonces que es completo para ver que es de Banach.

Sea $\{T_n, n = 1, 2, \ldots\} \subset \mathcal{L}^*(X,Y)$ sucesión de Cauchy. Para cada $x \in X$, $\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\|$, luego $\{T_n(x), n = 1, 2, \ldots\}$ es sucesión de Cauchy en Y, y como Y es completo, el límite $T(x) := \lim_{n\to\infty} T_n(x)$ está bien definido para cada $x \in X$. Por la linealidad de cada T_n,

$$(\forall x, y \in X)(\forall \alpha \in \mathbb{K})T_n(\alpha x + y) = \alpha T_n(x) + T_n(y).$$

Tomando el límite cuando $n \to \infty$, llegamos a $T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y)$, por lo tanto T es lineal.

Probemos ahora que T es acotada. Notemos que $\|T_n\| \leq \|T_n - T_m\| + \|T_m\|$, y lo mismo intercambiando n y m, por lo que

$$|\|T_n\| - \|T_m\|| \leq \|T_n - T_m\|,$$

luego $\{\|T_n\|\}_{n=1}^\infty$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$. Esto implica que hay $M < \infty$ tal que $\|T_n\| < M$ para toda n, entonces $(\forall n = 1, 2, \ldots)(\forall x \in X)\|T_n(x)\| \leq M\|x\|$. Como la norma es una función continua, tomando el límite cuando $n \to \infty$

llegamos a $\|T(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n(x)\| \leq M\|x\|$ para toda $x \in X$, luego T es acotada.

Para terminar, sea $\epsilon > 0$ y $N > 0$ tal que $\|T_n - T_m\| \leq \epsilon$ cuando $n, m \geq N$. Entonces, si $\|x\| = 1$, también $\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \epsilon$. Y por la continuidad de la norma $\|T_n(x) - T(x)\| = \lim_{m\to\infty} \|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \epsilon$ para todo $x \in X$ de norma uno. Podemos concluir que $T_n \to T,\ n \to \infty$ en $\mathcal{L}^*(X, Y)$. □

Con lo anterior podemos mostrar el siguiente resultado que se tiene en teoría de matrices y que originalmente es la idea de una serie geométrica en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Teorema 1.2.6. ***(de Neumann)*** *Sea X un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}^*(X)$. Si $\|T\| < 1$, entonces $I - T$ es invertible, i.e. existe $A \in \mathcal{L}^*(X)$ tal que $(I - T)A = A(I - T) = I$. Más aún, podemos calcular A con la* ***serie de Neumann***

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} T^k.$$

Demostración. Definamos $A_n := \sum_{k=0}^{n} T^k$ para $n = 0, 1, \ldots$. Se puede verificar que cada A_n es lineal y acotada. Para $n > m$ tenemos que

$$\|A_n - A_m\| = \|\sum_{k=m+1}^{n} T^k\| \leq \sum_{m+1}^{n} \|T\|^k = \frac{\|T\|^{m+1} - \|T\|^{n+1}}{1 - \|T\|}.$$

Como $\|T\|^m \to 0$ cuando $m \to \infty$, $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathcal{L}^*(X)$. Por el teorema anterior hay $A \in \mathcal{L}^*(X)$ con $A_n \to A$ si $n \to \infty$.

Así tenemos que $(I - T)A_n = \sum_{k=0}^{n} T^k - T\sum_{k=0}^{n} T^k = I - T^{n+1}$. Por lo que $\|(I - T)A_n - I\| \to 0$ cuando $n \to \infty$, luego $(I - T)A = I$. Similarmente $A(I - T) = I$. Podemos entonces concluir $A = (I - T)^{-1}$. □

Ejemplo 1.2.7. Sea $X := C[0, 1]$ y $k : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua. Si $\sup_{s,t\in[0,1]} |k(s, t)| < 1$, entonces del Teorema de Neumann sabemos que $I - T$ es invertible, donde T el operador integral con núcleo k. El inverso puede ser calculado teóricamente con la serie de Neumann. Así, podemos encontrar la incongnita $x \in X$ del la ecuación

$$x(t) - \int_0^1 k(s, t)x(s)ds = v(t),\ t \in [0, 1],$$

donde $v \in X$ es conocido. Esto es, resolvemos $x - Tx = v$, mediante $x = (I - T)^{-1}v$.

Ahora, basando en las series de Neumann, podemos construir un método para resolver ecuaciones de la forma $Tx = v$.

Teorema 1.2.8. *Sea X espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}^*(X)$. Supongamos que existe $L \in \mathcal{L}^*(X)$ tal que $\|I - TL\| < 1$. Si $v \in X$, entonces existe $x \in X$, no necesariamente única, tal que $Tx = v$. Más aún, $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, donde $x_0 := Lv$ y $x_{n+1} := x_n + L(v - Tx_n)$.*

Demostración. Se puede probar que TL está en $\mathcal{L}^*(X)$, luego por el Teorema de Neumann, TL es invertible, y de hecho

$$(TL)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(I - TL)^k.$$

Definimos $x := L(TL)^{-1}v$, entonces $T(x) = (TL)(TL)^{-1}v = v$. Sea $x_n := L\sum_{k=0}^{n}(I-TL)^k v$ para $n = 0, 1, \ldots$. Como la serie $\sum_{k=0}^{\infty}\|I-TL\|^k$ es convergente, $\sum_{k=n}^{\infty}\|I-TL\|^k \to 0$ cuando $n \to \infty$. Además,

$$\|x_n - x\| = \|L\sum_{k=n+1}^{\infty}(I-TL)^k v\| \leq \|L\|\sum_{k=n+1}^{\infty}\|I-TL\|^k\|v\|,$$

por lo que $x_n \to x, n \to \infty$.

Ahora tenemos que

$$\begin{aligned}
x_n &= L\sum_{k=0}^{n}(I-TL)^k v = L\left[I + \sum_{k=1}^{n}(I-TL)^k\right]v \\
&= L\left[I + (I-TL)\sum_{k=0}^{n-1}(I-TL)^k\right]v \\
&= \left[L + L\sum_{k=0}^{n-1}(I-TL)^k - LTL\sum_{k=0}^{n-1}(I-TL)^k\right]v \\
&= \left[L\sum_{k=0}^{n-1}(I-TL)^k + L\left(I - TL\sum_{k=0}^{n-1}(I-TL)^k\right)\right]v \\
&= x_{n-1} + L(v - T(x_{n-1})),
\end{aligned}$$

para $n = 1, 2, \ldots$, y $x_0 = Lv$. □

Concluimos esta sección enunciando el **Teorema de Banach-Steinhaus**, o también llamado el **principio de acontamiento uniforme**. Omitimos la demostración, pero se puede encontrar en otros libros de análisis funcional.

Teorema 1.2.9. *Sea X un espacio de Banach y Y ELN. Sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}^*(X,Y)$.*

$$\textit{Si } (\forall x \in X)\sup_{T\in\mathcal{F}}\|Tx\| < \infty, \textit{ entonces } \sup_{T\in\mathcal{F}}\|T\| < \infty.$$

1.3 Contracciones

En esta sección trabajamos con transformaciones no necesariamente lineales.

Definición 1.3.1. Sea (X, d) un espacio métrico y $F : X \to X$. Se dice que F es una **contracción** si $(\forall x, y \in X)d(F(x), F(y)) \leq \theta d(x, y)$ con $\theta \in [0, 1)$.

Teorema 1.3.2. ***(de la contracción de Banach)*** *Sea* (X, d) *un espacio métrico completo. Si* $F : X \to X$ *es una contracción, entonces* F *tiene un único punto fijo* x. *Más aún,* $(\forall x_0 \in X) x_n \to x$ *cuando* $n \to \infty$, *donde* $x_0 \in X$ *y* $x_{n+1} := F(x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Demostración. Tenemos que $d(x_n, x_{n-1}) = d(F(x_{n-1}), F(x_{n-2})) \leq \theta d(x_{n-1}, x_{n-2})$. Repitiendo este argumento, llegamos a $d(x_n, x_{n-1}) \leq \theta^{n-1} d(x_1, x_0)$. Así, para $m \geq n$,

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + \ldots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq (\theta^{m-1} + \ldots + \theta^n) d(x_1, x_0) \leq \frac{\theta^n}{1-\theta} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Por lo que $d(x_m, x_n) \to 0$ cuando $m, n \to \infty$, luego $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy; como X es completo hay $x \in X$ con $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Además, como F es continua

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

Supongamos que hay otro punto fijo $y \in X$ de F, i.e. $F(y) = y$ con $y \neq x$. Se tiene entonces que $0 < d(x, y) = d(F(x), F(y)) \leq \theta d(x, y)$. Esto es una contradicción, por lo que $y = x$. $\square$

Ejemplo 1.3.3. Consideremos la ecuación integral de Fredholm (no necesariamente lineal)

$$\int_0^1 k(s, t, x(s)) ds + w(t) = x(t),$$

donde k y w son conocidas. Entonces la solución de la ecuación es un punto fijo del operador

$$F(x)(t) := \int_0^1 k(s, t, x(s)) ds + w(t), \ t \in [0, 1].$$

Denotado tambien $Fx(t)$.

Supongamos que $k(s, t, r)$ y $w(t)$ son funciones continuas en $[0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{R}$ y $[0, 1]$, respectivamente. Así, podemos buscar la solución en $C[0, 1]$.

Si suponemos que el kernel k satisface la **condición de Lipshitz**:

$$|k(s, t, r_0) - k(s, t, r_1)| \leq \theta |r_0 - r_1| \text{ con } \theta \in [0, 1).$$

Podemos entonces considerar $C[0, 1]$ con la métrica del supremo, lo cual forma un espacio métrico completo. Veamos que bajo estas condiciones, $F : C[0, 1] \to C[0, 1]$ es una contracción. Sean $u, v \in C[0, 1]$, luego

$$|Fu(t) - Fv(t)| \leq \int_0^1 |k(s, t, u(s)) - k(s, t, v(s))| ds \leq \theta \|u - v\|_\infty,$$

para toda $t \in [0, 1]$. Por lo tanto $\|Fu - Fv\|_\infty \leq \theta \|u - v\|_\infty$, y por el Teorema de la contracción de Banach, F tiene una única solución en $C[0, 1]$.

Nota 1.3.4. El proceso del teorema de anterior dado por $x_{n+1} := F(x_n)$ define el **método iterativo de Picard** para encontrar la solución.

Ahora extenderemos el método descrito en el Ejemplo 1.3.3 a situaciones donde el parámetro θ no necesariamente es menor a 1. La prueba del siguiente resultado se deja al lector, quien podría emular en la idea de la Proposición 1.1.18.

Lema 1.3.5. *Sea $\alpha > 0$ y $a < b$. Con la función*

$$\|x\|_w := \sup_{t\in[a,b]} |x(t)|e^{-\alpha t},$$

el espacio $C[a,b]$ es normado y completo.

Nota 1.3.6. La norma descrita anteriormente (a veces llamada una **norma ponderada**) es equivalente a la norma del supremo (i.e. cuando $\alpha = 0$), esto significa que ambas normas generan la misma topología. Note también que el lema puede extenderse a conjuntos más generales que un intervalo compacto $[a,b]$.

Teorema 1.3.7. *Sea $f \in C([a,b] \times \mathbb{R})$ función real valuada y asumamos que existe $\lambda > 0$ tal que*

$$(\forall s \in [a,b])(\forall t_0, t_1 \in \mathbb{R})|f(s,t_0) - f(s,t_1)| \leq \lambda|t_0 - t_1|.$$

Entonces, el PVI $x' = f(t,x),\ x(a) = \xi$ tiene solución única en $C[a,b]$.

Demostración. El PVI es equivalente a resolver $x = Tx$ donde

$$Tx(t) := \xi + \int_a^t f(s,x(s))ds, \text{ con } x \in C[a,b].$$

Ahora, usando el lema anterior, queremos mostrar que T es una contracción en $(C[a,b], \|\cdot\|_w)$ con $\alpha = \lambda/\theta$ y $\theta \in (0,1)$.

Para $u, v \in C[a,b]$ tenemos que

$$\begin{aligned}
|Tu(t) - Tv(t)| &\leq \int_a^t |f(s,u(s)) - f(s,v(s))|ds \leq \lambda \int_a^t e^{\lambda s/\theta} e^{-\lambda s/\theta}|u(s) - v(s)|ds \\
&\leq \lambda\|u - v\|_w \int_a^t e^{\lambda s/\theta} ds \leq \lambda\|u - v\|_w \theta e^{\lambda t/\theta}/\lambda,
\end{aligned}$$

para todo $t \in [a,b]$. Luego

$$(\forall t \in [a,b])|Tu(t) - Tv(t)|e^{-\lambda t/\theta} \leq \theta\|u - v\|_w,$$

por lo tanto $\|Tu - Tv\|_w \leq \theta\|u - v\|_w$. De donde se deduce el resultado usando el teorema anterior. □

Nota 1.3.8. La función $w(t) := e^{-\alpha t}$ puede ser convenientemente escogida de otra forma para formar un espacio métrico completo.

Nota 1.3.9. El teorema anterior puede extenderse a sistemas de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)), \end{aligned}$$

con $x_i(a) := \xi_i$, $i = 1, \ldots, n$. Para esto, consideramos la función $\hat{f} := (f_1, \ldots, f_n) : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y tomamos el espacio $\hat{C}[a, b] = \{\hat{x} : [a, b] \to \mathbb{R}^n\}$ con la norma

$$\|\hat{x}\|_w := \sup_{t \in [a,b]} e^{-\lambda t/\theta} \|\hat{x}(t)\|,$$

donde $\|\hat{x}(t)\| := \max(|x_1(t)|, \ldots, |x_n(t)|)$, que por cierto es equivalente a la norma euclidiana. Así, si se cumple la condición

$$\|\hat{f}(t, \hat{u}) - \hat{f}(t, \hat{v})\| \leq \lambda \|\hat{u} - \hat{v}\|$$

con $\hat{u}, \hat{v} \in \mathbb{R}^n$, podemos verificar que $\hat{x}' = \hat{f}(t, \hat{x}),\ \hat{x}(a) = \hat{\xi}$ tiene solución única.

Ahora tenemos los siguientes resultados como concecuencia de trabajar con una contracción.

Teorema 1.3.10. *Sea (X, d) un espacio métrico completo y $F : X \to X$ una función tal que F^m es una contracción para algún $m < \infty$. Entonces F tiene un único punto fijo x. Más aún, $(\forall y \in X) x = \lim_{n\to\infty} x_n$ donde $x_0 := y$ y $x_{n+1} := F(x_n)$.*

Demostración. Como F^m es una contracción, hay $x \in X$ tal que $F^{km}(x) = x$ para $k = 1, 2, \ldots$. Así $F(x) = F(F^m(x)) = F^{m+1}(x) = F^m(F(x))$, es decir, $F(x)$ es también punto fijo de F^m. Por unicidad $F(x) = x$. Además, si hay $y \neq x$ tal que $F(y) = y$, entonces $F^m(y) = y$. Por lo que y sería punto fijo de F^m, pero esto no es posible pues x es el único punto fijo de F^m.

Tenemos que $(\forall y \in X) \lim_{n\to\infty} F^{nm+i}(y) = \lim_{n\to\infty} F^{nm}(F^i(y)) = x$ para cada $i = 1, \ldots, m$. Luego,

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N)(\forall i = 1, \ldots, m)(n \geq N) d(F^{nm+i}(y), x) < \epsilon.$$

Como todo entero positivo k es de la forma $nm + i$ con $1 \leq i \leq m$, tenemos que para todo $k \geq Nm$, $d(F^k(y), x) < \epsilon$, es decir, $\lim_{k\to\infty} F^k(y) = x$. □

Teorema 1.3.11. *Sean $k : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ y $v : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Entonces la ecuación lineal de Volterra*

$$x(t) = \int_a^t k(s, t)x(s)ds + v(t)$$

tiene una única solución en $C[a, b]$.

Demostración. Sea $T(x) := \int_a^t k(s,t)x(s)ds$ para $x \in (C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$. Notemos que
$$|Tx(t)| = |\int_a^t k(s,t)x(s)ds| \leq \|k\|_\infty \|x\|_\infty (t-a).$$
También,
$$\begin{aligned} |T^2x(t)| &\leq \int_a^t |k(s,t)||Tx(s)|ds \leq \int_a^t |k(s,t)|\|k\|_\infty \|x\|_\infty (s-a)ds \\ &\leq \|k\|_\infty^2 \|x\|_\infty \frac{(t-a)^2}{2}. \end{aligned}$$
Así sucesivamente llegamos a que
$$|T^n x(t)| \leq \|k\|_\infty^n \|x\|_\infty \frac{(t-a)^n}{n!} \leq \|k\|_\infty^n \|x\|_\infty \frac{(b-a)^n}{n!},$$
para toda $t \in [a,b]$. Luego, $\|T^n\| \leq c^n/n!$ con $c := \|k\|_\infty (b-a)$. Tomemos m tal que $\|T^m\| < 1$. Definamos $F(x) := Tx + v$ para $x \in C[a,b]$. Entonces, como $F^k(x) = T^k x + T^{k-1}v + \ldots + Tv + v$, llegamos a que
$$\|F^m(x) - F^m(y)\|_\infty = \|T^m x - T^m y\|_\infty \leq \|T^m\| \|x-y\|_\infty$$
para $x, y \in C[a,b]$. Esto muestra que F^m es una contracción en un espacio completo, y por el teorema anterior F tiene un único punto fijo: la solución de la ecuación integral. □

Corolario 1.3.12. *Sean $f, h \in C[a,b]$. El PVI $x' = f(t)x + h(t),\ x(a) = \xi$, tiene solución única en $C[a,b]$.*

1.4 Sistemas de ecuaciones diferenciales

Considere la ecuación diferencial ordinaria (EDO) de la forma
$$x^{(n)} = f(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)).$$
Decimos que $f(t, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ es de **Lipschitz** en $\overline{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ cuando
$$|f(t, x_0, \ldots, x_{n-1}) - f(t, y_0, \ldots, y_{n-1})| \leq c\|\overline{x} - \overline{y}\|,$$
donde $\|\cdot\|$ representa la norma euclidiana.

Proposición 1.4.1. *Sea $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua y de Lipschitz en $\overline{x}$. Entonces la EDO*
$$x^{(n)} = f(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)),$$
con condición inicial $x^{(i)}(t_0) = \xi_i,\ i = 0, 1, \ldots, n-1,\ t_0 \in [a,b]$, tiene solución única.

Demostración. Definamos un sistema vectorial de la forma

$$\overline{y}' = \overline{g}(t, \overline{y}) \text{ con } \overline{y} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ y } \overline{g} : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

de la siguiente manera:

$$\begin{cases} y_0' &= y_1 &=: g_0(t, y_0, \ldots, y_{n-1}) \\ y_1' &= y_2 &=: g_1(t, y_0, \ldots, y_{n-1}) \\ &\vdots & \\ y_{n-2}' &= y_{n-1} &=: g_{n-2}(t, y_0, \ldots, y_{n-1}) \\ y_{n-1}' &= f(t, y_0, \ldots, y_{n-1}) &=: g_{n-1}(t, y_0, \ldots, y_{n-1}) \end{cases}$$

Y la condición inicial es precisamente $y_i(t_0) := x^{(i)}(t_0),\ i = 1, \ldots, n-1$.

Vemos que cada $g_i,\ i = 0, 1, \ldots, n-1$ es de Lipschitz, luego $\overline{g}$ también es de Lipschitz. Por lo tanto, por los teoremas de contracciones de la sección anterior (vea la Nota 1.3.9), la EDO con condiciones iniciales tiene solución única. □

Ahora consideremos el **sistema lineal** o **separable**

$$\overline{x}'(t) = A(t)\overline{x}(t) + B(t)$$

con condiciones iniciales $\overline{x}(t_0) = \overline{\xi}$, donde $A : [a, b] \to \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B : [a, b] \to \mathbb{R}^n$.

Si las entradas A_{ij} $1 \leq i, j \leq n$ son funciones continuas, entonces hay solución única, pues se cumple la condición de Lipschitz:

$$\|[A(t)\overline{x} + B(t)] - [A(t)\overline{y} + B(t)]\| = \|A(t)(\overline{x} - \overline{y})\| \leq c\|\overline{x} - \overline{y}\|.$$

Con esto podemos probar los siguiente resultados.

Proposición 1.4.2. *El conjunto X de soluciones de $\overline{x}' = A(t)\overline{x}$ es un espacio lineal de dimensión n.*

Nota 1.4.3. En el contexto de esta proposición, se dice que el conjunto de soluciones forman el espacio nulo $N(L)$ del operador $L(\overline{x}) := \overline{x}' - A(t)\overline{x}$. Lo cual se escribe como $N(L) := \{\overline{x} : L\overline{x} = 0\}$.

Demostración. Puesto que $A(t) \times (\lambda\overline{x} + \overline{y}) = \lambda A(t)\overline{x} + A(t)\overline{y}$ y $(\lambda\overline{x} + \overline{y})' = \lambda\overline{x}' + \overline{y}'$, el conjunto X es subespacio lineal.

Definamos $\delta_i := (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (i.e. 1 en la posición i), y sea $\overline{x}_i$ la solución de $\overline{x}' = A(t)\overline{x}$ con condición inicial $\overline{x}(t_0) = \delta_i$, esto para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ahora bien, si $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overline{x}_i = 0$, entonces

$$0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overline{x}_i(t_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_i,$$

por lo que $\lambda_i = 0$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Por lo tanto $\{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n\}$ es linealmente independiente.

Finalmente, sea $\overline{z}$ alguna solución del sistema lineal con condición $\overline{x}(t_0) = \overline{\eta}$. Definiendo $\overline{y} := \sum_{i=1}^n \eta_i \overline{x}_i$, vemos que $\overline{y}$ es también solución del sistema lineal y además que $\overline{y}(t_0) = \overline{\eta}$, luego por la unicidad de la solución $\overline{y} = \overline{z}$. Concluimos entonces que la $dim(N(L)) = n$. □

Corolario 1.4.4. *Si $a_n \neq 0$, la EDO $a_n x^{(n)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x = 0$ tiene exactamente n soluciones linealmente independiente.*

Definición 1.4.5. Sean $x_1, \ldots, x_n \in C^{(n-1)}[a,b]$. El **determinante Wronskiano** del vector $\overline{x}$ se define como

$$W(t) := \det \begin{bmatrix} x_1(t) & \ldots & x_n(t) \\ x_1'(t) & \ldots & x_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \ldots & x_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}.$$

A la matriz que define $W(t)$ le llamamos la matriz Wronskiana, denotada $M(t)$.

Teorema 1.4.6. *Sean $x_1, \ldots, x_n$ soluciones de*

$$L(x) := x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x = 0.$$

Tales soluciones son linealmente independientes si y solo si $W(t) \neq 0$ para todo $t \in [a,b]$.

Demostración. ($\Leftarrow$) Asumamos que el determinante es siempre diferente de cero, y por un momento supongamos que $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$ y $\lambda_i \neq 0$ para al menos un índice i. Derivando sucesivamente tenemos que $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^{(k)} = 0$ para $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Esto implica que las columnas de $M(t)$ son linealmente dependientes para todo $t \in [a,b]$, luego $W(t) = 0$ para todo $t \in [a,b]$, contradiciendo la hipótesis.

($\Rightarrow$) Ahora asumamos que las soluciones son lin. ind. y pensemos que $(\exists t_0 \in [a,b]) W(t_0) = 0$. Luego la matriz Wronskiana $M(t)$ en $t = t_0$ es singular, por lo que hay un vector de escalares $\overline{\lambda} \neq 0$ tal que $M(t_0)\overline{\lambda} = 0$. Definimos pues $x := \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$. Como cada x_i, $i = 1, \ldots, n$ es solución del sistema lineal, se tiene que $L(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i L(x_i) = 0$. Además, del hecho $M(t_0)\overline{\lambda} = 0$ se tiene que $x^{(k)}(t_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^{(k)}(t_0) = 0$ para cada $k = 0, \ldots, n-1$.

Por la unicidad de soluciones $x = 0$, lo cual implicaría que los $x_1, \ldots, x_n$ son linealmente dependientes, contradiciendo la hipótesis. Concluimos que $(\forall t \in [a,b]) W(t) \neq 0$.

□

1.5 Ejercicios

En este curso puede usar la regla de Leibnitz

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt = b'(x)f(x,b(x)) - a'(x)f(x,a(x)) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{df}{dx}(x,t)dt$$

para funciones diferenciables.

1.5.1. Sea

$$[Tf](t) := \int_{-1}^{1} (t-s)^2 f(s)ds.$$

Describa el rango de L y pruebe que e^t no puede estar ahi.

1.5.2. Probar que el PVI $\{x''(t) + \lambda^2 x(t) - q(t)x(t) = 0;\ x(0) = 1, x'(0) = 0\}$ puede ser resuelto por medio de

$$x(t) - \frac{1}{\lambda}\int_0^t q(s)sen((t-s)\lambda)x(s)ds = cos(\lambda t).$$

1.5.3. Diga a que PVI es equivalente resolver

$$x(t) = w(t) + \int_0^t (t+s)x(s)ds.$$

1.5.4. Demuestre que el operador $T : C[0,1] \to C[0,1]$ definido como

$$[Tx](t) := \int_0^1 cos(st)x(s)ds + 2x(t)$$

es sobreyectivo.

1.5.5. Use integración por partes para mostrar la igualdad

$$\int_a^x \int_a^y f(t)dtdy = \int_a^x (x-t)f(t)dt.$$

1.5.6. Sea $C_0(\mathbb{R})$ el espacio de funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $\|f\|_\infty < \infty$. Demuestre que este espacio de Banach.

1.5.7. Reduzca a una ecuación diferencial la siguiente ecuación integral

$$u(t) = \int_0^\infty e^{-|t-s|}u(s)ds.$$

Con u continua y tal que $\int_0^\infty e^{-|t-s|}|u(s)|ds < \infty$.

1.5.8. Considere la siguiente ecuación integral de **Fredholm**,

$$x(t) = \lambda \int_0^1 e^{t-s}x(s)ds + v(t)$$

con $v \in C[0,1]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ dados. ¿Para qué valores de λ se puede aplicar el Teorema de Neumann para resolver esta ecuación? Encuentre la solución.

1.5.9. Use el Teorema de Neumann para resolver la ecuación integral de **Volterra**

$$x(t) - \lambda \int_0^t e^{s-t}x(s)ds = -e^{-t} \text{ con } \lambda \in (0,1).$$

1.5.10. Considere el operador de Volterra

$$[Tx](t) := \int_0^t s^{t-s} x(s) ds.$$

Diga si está acotado en $(C[0,1], \| \bullet \|_\infty)$. Muestre que $x(t) := 0$ y $x(t) := t^{t-1}$ son soluciones de $Ty = y$, y explique porque ocurre esto.

1.5.11. Muestre que el operador

$$[Tx](t) := x(t) - \int_0^1 x(s)(s^2 + t^2/2) ds$$

es invertible y exprese su inverso con una serie.

1.5.12. Probar que la sucesión que surge del Teorema de Neumann aplicado a

$$u(x) = x^2 + \int_0^1 e^{-y/x} u(y) dy$$

converge.

1.5.13. Sea X un espacio de Banach, $T \in \mathcal{L}^*(X)$ y $y \in X$. Defina $x_0 \in X$ arbitrario y $x_{n+1} = T(x_n) + y$ para $n = 1, 2, \ldots$. ¿ Qué pediría a $\|T\|$ para que $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ sea convergente?

1.5.14. Sea $\alpha > 0$, y $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestre que $\|x\|_w := \sup_{t \in [a,b]} x(t) e^{-\alpha t}$ define una norma en $C[a,b]$ y además lo hace completo.

1.5.15. ¿Para qué valores de λ podría la ecuación integral

$$x(t) = \lambda \int_0^1 e^{st} \cos(x(s)) ds + \tan(t)$$

tener solución en $C[0,1]$?

1.5.16. Demuestre que

$$x(t) = \int_0^t [x(s) + s] \sin(s) ds$$

tiene una única solución en $C[0, \pi/2]$; encuentrela.

1.5.17. Sea $g \in C[0,b]$. Demuestre que el PVI $x'(t) = \cos(x(t)g(t)),\ x(0) = \alpha \in \mathbb{R}$ tiene solución única.

1.5.18. Para $t \in [0,b]$ y $x \in \mathbb{R}$, sea $(t,x) \longmapsto f(t,x) \in \mathbb{R}$ función continua, tal que $\frac{df}{dx}$ es continua. Demuestre que el PVI

$$x'(t) = f(t, x(t)),\ x(0) = \alpha,$$

tiene solución única en $C[0,b]$.

1.5.19. Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua y acotada, y sea $p > 0$. Considere la ecuación

$$u(t) = f(t) + c \int_0^t (s/t)^p u(s) ds.$$

¿Para qué valores de c el método iterativo (del teorema de la contracción) converge?

1.5.20. Muestre que $x_1(t) := \sqrt{t}$ y $x_2(t) := 1/t$ son soluciones de la ecuación

$$2t^2 x'' + 3tx' - x = 0, \; t \in (0, \infty).$$

Diga que ocurre con el Wronskiano de estas soluciones cuando $t \to 0$. Resuelva el PVI dado por la ecuación diferencial y las condiciones $x(1) = 2$ y $x'(1) = 1$.

1.5.21. Sean p y q funciones continuas en un intervalo abierto (a, b). Sean x_1 y x_2 las soluciones linealmente independientes de $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$. Muestre que el Wronskiano $W(t)$ de estas soluciones resuelve la ecuación $W' + p(t)W = 0$.

1.5.22. Sean x_1 y x_2 soluciones de la ecuación de Bessel

$$t^2 x'' + tx' + (t^2 - n^2)x = 0, \; t \in (0, \infty),$$

tales que $x_1(1) = x_2'(1) = 1$ y $x_2(1) = x_1'(1) = 0$. Encuentre el Wronskiano de x_1 y x_2.

1.6 Notas

Capítulo 2

Espacios con producto interno

2.1 Espacios de Hilbert

Para todo efecto práctico, en esta sección nos restringimos al campo $\mathbb{C}$ (que incluye $\mathbb{R}$).

Definición 2.1.1. Un **producto interno** en un espacio vectorial X es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ que cumple
(i) para $y \in X$ fijo, $x \mapsto \langle x, y \rangle$ es lineal,
(ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,
(iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$,
(iv) $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

De la definición, tenemos las reglas

$$\begin{aligned} \langle \lambda x + \mu y, z \rangle &= \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle, \\ \langle x, \lambda y + \mu z \rangle &= \overline{\lambda} \langle x, y \rangle + \overline{\mu} \langle x, z \rangle. \end{aligned}$$

Lema 2.1.2. *Sea X un espacio vectorial con producto interno. Entonces*
(i) $x = 0 \iff (\forall y \in X)\ \langle x, y \rangle = 0$,
(ii) $x = y \iff (\forall z \in X)\ \langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$,

Nota 2.1.3. La función $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ es una norma en X. Esta norma determina una topología en X.

Ejemplo 2.1.4. $X = \mathbb{C}^n$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$ donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$. La norma es

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$

Ejemplo 2.1.5. Más generalmente, sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz n-por-n que satisface $\overline{A}^{\mathrm{T}} A = I$ donde A^{T} es la matriz transpuesta. Defínase

$$\langle x, y\rangle_A = \sum_{i,j} x_i a_{ij} \overline{y_j} = x^{\mathrm{T}} A \overline{y}$$

para $x, y \in \mathbb{C}^n$. Entonces $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ es un producto escalar en $\mathbb{C}^n$. Todo producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en $\mathbb{C}^n$ se obtiene de esta forma: de los elementos básicos $\delta_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ se define $a_{ij} = \langle\delta_i, \delta_j\rangle$.

En los siguientes resultados X es un espacio vectorial con producto interno.

Teorema 2.1.6. *Se cumple lo siguiente para todos $x, y \in X$:*
(i) $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ ***(desigualdad de Cauchy-Schwarz)***,
(ii) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ ***(Ley del paralelogramo)***,
(iii) Si $\langle x, y\rangle = 0$, *entonces* $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ ***(Pitágoras)***.

Demostración. (i) Supongamos que $y \neq 0$, pues de otro modo es trivial;

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x - \lambda y\|^2 = \langle x - \lambda y,\ x - \lambda y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle - \overline{\lambda}\langle x, y\rangle - \lambda(\langle y, x\rangle - \overline{\lambda}\langle y, y\rangle). \end{aligned}$$

Tomemos λ para anular el último término, $\overline{\lambda} = \langle y, x\rangle/\langle y, y\rangle$, dejando

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x, x\rangle - \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle x, y\rangle \\ &= \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2}, \end{aligned}$$

de lo cual se sigue la desigualdad de Cauchy-Schwarz.
(ii) Al expandir $\|x \pm y\|^2$ aparecen términos $\pm(\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle)$ que se cancelan en la suma $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$, dejando $2(\langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle)$.
(iii) Esto resulta al anularse los términos $\langle x, y\rangle$, $\langle y, x\rangle$ que surgen al expandir $\|x+y\|^2$. □

Ahora veremos numerosas consecuencias de estas propiedades, sobre de todo la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Proposición 2.1.7. $\|x\| = \sup\{|\langle x, y\rangle| : \ \|y\| = 1\}$.

Demostración. Si $x = 0$, se cumple trivialmente. Sea $\|y\| = 1$, por Cauchy-Schwarz $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|$. Ahora, para $y := x/\|x\|$,

$$|\langle x, y\rangle| = \left|\left\langle x, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle\right| = \frac{|\langle x, x\rangle|}{\|x\|} = \|x\|,$$

por lo tanto se alcanza el supremo. □

El siguient resultado lo mencionamos sin demostración.

Proposición 2.1.8. *Si se cumple la ley del paralelogramo en un ELN X, entonces existe un producto interno en X que define la norma.*

Definición 2.1.9. Sea X un espacio con producto interno. Decimos que
(i) $x, y \in X$ son **ortogonales** si $\langle x, y\rangle = 0$, y lo denotamos $x \perp y$,
(ii) un conjunto $E \subseteq X$ es **ortogonal** si cualesquier dos elementos de E son ortogonales, y
(iii) E es **ortonormal** si es ortogonal y sus elementos tienen norma 1.

Proposición 2.1.10. *(Generalización del T. de Pitágoras) Sean $x_i \in X$ ($i = 1, \ldots, n$) ortogonales. Entonces* $\|\sum_{i=1}^n x_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$.

Teorema 2.1.11. (Ortogonalización de Gram-Schmidt) *Sea $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ un conjunto lin.ind. en X. Entonces, existe $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ ortonormal tal que para cada n, $\langle\{y_k\}_{k=1}^n\rangle = \langle\{x_k\}_{k=1}^n\rangle$.*
Demostración. Definimos $y_1 := x_1/\|x_1\|$, e iterativamente

$$y_n := \frac{x_n - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\langle x_n, y_k\rangle y_k}{\left\|x_n - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\langle x_n, y_k\rangle y_k\right\|}$$

para $n = 2, 3, \ldots$. Dicho conjunto cumple lo deseado. □

Definición 2.1.12. Una **base ortonormal** (ó **conjunto ortonormal completo** ó **sistema ortonormal completo**) de X es un conjunto ortonormal máximo. (Se admite el conjunto vacío en el caso de que $X = \{0\}$.)

Una base ortonormal no necesariamente es una base de Hamel ó de Schauder (vea Definición 2.2.13).

Nota 2.1.13. Utilisando el Lema de Zorn se puede demostrar que todo ELN X con producto interno tiene una base ortonormal.

Teorema 2.1.14. *Sean $e_1, \ldots, e_n$ ortonormales en X, y sea $x \in X$ arbitrario. Entonces,*
(i) $\sum_{j=1}^n |\langle x, e_j\rangle|^2 \le \|x\|^2$ ***(Desigualdad de Bessel)*** *y*
(ii) para cada $k = 1, \ldots, n$, se tiene que $(x - \sum_{j=1}^n \langle x, e_j\rangle e_j) \perp e_k$.
Demostración. (i) se sigue de

$$0 \le \|x - \sum_{j=1}^n \langle x, e_j\rangle e_j\|^2 = \langle x, x\rangle - 2\sum_{j=1}^n |\langle x, e_j\rangle|^2 + \sum_{j=1}^n |\langle x, e_j\rangle|^2.$$

Para mostrar (ii), observamos que

$$\left\langle x - \sum_{j=1}^n \langle x, e_j\rangle e_j \ , \ e_k \right\rangle = \langle x, e_k\rangle - \langle x, e_k\rangle = 0$$

para $k = 1, \ldots, n$. □

Corolario 2.1.15.
(i) *Si* $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ *es ortonormal, entonces* $\lim_{j\to\infty}\langle x, e_j\rangle = 0$.
(ii) *Si* $E \subseteq X$ *es ortonormal, entonces para cada* $x \in X$*, el subconjunto de elementos* $e \in E$ *tales que* $\langle x, e\rangle \neq 0$ *es a lo más numerable.*

Demostración. El inciso (i) es consecuencia inmediata de la desigualdad de Bessel pues $|\langle x, e_j\rangle|^2 \to 0$. Para (ii), fijemos $x \in X$ y consideremos $S = \{e \in E\colon\ \langle x, e\rangle \neq 0\}$. Definamos

$$S_n(x) := \left\{ e \in E\colon\ |\langle x, e\rangle| > \frac{\|x\|}{n} \right\} \subseteq S.$$

Si hubiese más de n^2 elementos en $S_n(x)$, digamos $e_1, \ldots, e_N$ con $N > n^2$, tendríamos

$$\sum_{j=1}^{N} |\langle x, e_j\rangle|^2 > N(\|x\|/n)^2 > \|x\|^2,$$

contrario a la desigualdad de Bessel. Por lo tanto $S_n(x)$ es finito y la unión $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n(x)$ es numerable. □

Teorema 2.1.16. (Teorema de bases ortonormales) *Sea* X *espacio con producto interno y* $E \subseteq X$ *ortonormal. Las siguientes son equivalentes:*
(i) E *es completo,*
(ii) $(\forall x \in X)\ (\ x \perp E \implies x = 0\ )$,
(iii) $(\forall x \in X)\ x = \sum_{e\in E}\langle x, e\rangle e$,
(iv) $(\forall x \in X)\ \|x\|^2 = \sum_{e\in E} |\langle x, e\rangle|^2$ ***(identidad de Parseval)*** .

Cuando se cumple alguna de estas condiciones se dice que E es una *base ortonormal* de X. Recuerde que las sumatorias en (iii),(iv) son numerables por el Corolario 2.1.15.

Demostración. (i)⇒(ii): Sea E completo. Consideremos $x \perp E$. Si $x \neq 0$, entonces $E \cup \{x/\|x\|\}$ sería ortonormal, contradiciendo que E es completo. Por lo tanto $x = 0$.
(ii)⇒(iii): Sabemos que $x - \sum_{e\in E}\langle x, e\rangle e\ \perp\ E$ (donde la sumatoria es forzosamente numerable), y al asumir (ii) tenemos $x - \sum_{e\in E}\langle x, e\rangle e = 0$.
(iii)⇒(iv): Enumerando $\{e \in E\colon\ \langle x, e\rangle \neq 0\} = \{e_j\}$,

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle e_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|\langle x, e_j\rangle e_j\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\langle x, e_j\rangle|^2.$$

Al asumir (iii), la continuidad de la norma da

$$\|x\|^2 = \left\| \sum_{E} \langle x, e\rangle e \right\|^2 = \left\| \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle e_j \right\|^2 = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle e_j \right\|^2$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, e_j \rangle|^2 = \sum_E |\langle x, e \rangle|^2.$$

(iv)$\Rightarrow$(i): Supongamos ahora la identidad de Parseval. Si E no fuera completo, tomaríamos $y \in X - E$ con $E \cup \{y\}$ ortonormal para dar con la contradicción

$$1 = \|y\|^2 = \sum_{e \in E} |\langle y, e \rangle| = 0.$$

Por lo que E tiene que ser completo. $\square$

Definición 2.1.17. Sea E una base ortonormal de X. Al conjunto $\{\langle x, e \rangle\}_{e \in E}$ se le llama los **coeficientes de Fourier** de x (relativos a E), y a $\sum_{e \in E} \langle x, e \rangle e$ se le llama la **serie de Fourier** de x (relativa a E).

Definición 2.1.18. Un **espacio de Hilbert** es un espacio lineal con producto interno que además es completo.

Ejemplo 2.1.19. $\mathbb{C}^n$ y l_2 son espacios de Hilbert. $C[0,1]$ no es espacio de Hilbert (es un subespacio lineal no cerrado de $L^2[0,1]$).

Veamos que concecuencias tenemos cuando el espacio es completo, además los siguientes dos resultados nos permitirán demostrar el teorema de Riesz, el cual es muy importante.

Teorema 2.1.20. *Sea X un espacio de Hilbert, y sea $E \subseteq X$ no vacío, cerrado y convexo. Entonces, existe un único $x \in E$ de norma mínima.*

Demostración. Tomemos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ tal que $\|x_n\| \to d := \inf_{x \in E} \|x\|$ cuando $n \to \infty$. Por la ley del paralelogramo,

$$\left\| \frac{x_n - x_m}{2} \right\|^2 = 2 \left\| \frac{x_n}{2} \right\|^2 + 2 \left\| \frac{x_m}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{x_n + x_m}{2} \right\|^2.$$

Como $(x_n + x_m)/2 \in E$ por convexidad,

$$\|x_n - x_m\|^2 \leq 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - 4d^2,$$

lo cual converge a 0 cuando $m, n \to \infty$. Luego, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, y como E es cerrado el límite $x = \lim x_n$ está en E. Por lo tanto $\|x\| = d$.
(unicidad) Supongamos que $x, y \in E$ tales que $\|x\| = \|y\| = d$ donde d es el ínfimo de las distancias de 0 a elementos de E. Por la ley del paralelogramo,

$$\left\| \frac{x - y}{2} \right\|^2 = 2 \left\| \frac{x}{2} \right\|^2 + 2 \left\| \frac{y}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{x + y}{2} \right\|^2 \leq d^2/2 + d^2/2 - d^2 = 0,$$

por lo que $x = y$. $\square$

En espacios X con producto interno, para $E \subseteq X$, escribimos

$$E^{\perp} := \{x \in X : \; x \perp E\},$$

llamado el **complemento ortogonal**.

Definición 2.1.21. Dados dos subespacios lineales Y_1, Y_2 de un espacio lineal X, una **suma directa**, denotada $X = Y_1 \oplus Y_2$, es cuando todo elemento de X es suma de un elemento de Y_1 y un elemento de Y_2 de manera única.

Teorema 2.1.22. *Sea X un espacio de Hilbert y sea $Y \subseteq X$ un subespacio cerrado. Entonces $X = Y \oplus Y^{\perp}$.*

Demostración. Podemos suponer que Y es subespacio propio, de otro modo la conclusión es trivial. Fijemos $x \in X$. Sea $E = Y + x \subseteq X$; entonces E es no vacío, cerrado y convexo. Usando el teorema anterior, sea $z \in E$ de norma mínima. Sea $y = x - z$.

Consideremos $w \in Y$ con $\|w\| = 1$; luego $\langle z, w\rangle w - z \in E$ porque al sumar x obtenemos un elemento de Y. Por definición de z,

$$\|z\|^2 \leq \|z - \langle z, w\rangle w\|^2 = \|z\|^2 - 2|\langle z, w\rangle|^2 + |\langle z, w\rangle|^2\|w\|^2 \leq \|z\|^2,$$

por lo que $\langle z, w\rangle = 0$, o sea $z \perp w$. Esto demuestra que $z \in Y^{\perp}$, y tenemos $x = y + z$.

(unicidad) Supongamos que $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2$ con $y_1, y_2 \in Y$ y $z_1, z_2 \in Y^{\perp}$. Entonces $y_1 - y_2 = z_1 - z_2 \in Y \cap Y^{\perp} = \{0\}$, por lo tanto $y_1 = y_2$ y $z_1 = z_2$. Concluimos entonces que $X = Y \oplus Y^{\perp}$. $\square$

El siguiente resultado es análogo a la Proposición 1.1.16.

Teorema 2.1.23. ***(Teorema de Representación de Riesz)*** *Sea X un espacio de Hilbert, y sea $f \in X^*$. Entonces, existe un único $y \in X$ tal que*

$$(\forall x \in X)\ f(x) = \langle x, y\rangle.$$

Demostración. (existencia) Si $f = 0$, entonces $y = 0$. Sea pues $f \neq 0$, y definamos $Y = N(f) \neq X$. Observemos que $f|_{Y^{\perp}}$ es 1-a-1 porque $N(f|_{Y^{\perp}}) = N(f) \cap Y^{\perp} = \{0\}$.

Como f es continua, Y es cerrado y por le teorema anterior $Y^{\perp} \neq \{0\}$. Tomemos pues $z \in Y^{\perp}$ de norma uno, sabemos $f(z) \neq 0$ por la inyectividad. Para cualquier $x \in X$ se tiene

$$f\left(x - \frac{f(x)}{f(z)}z\right) = f(x) - \frac{f(x)}{f(z)}f(z) = 0$$

por lo tanto $x - \frac{f(x)}{f(z)}z$ está en Y y así es ortogonal a z. De esto se sigue $f(x)\langle z, z\rangle = f(z)\langle x, z\rangle$, lo cual implica $f(x) = f(z)\langle x, z\rangle = \langle x, y\rangle$ donde $y = \overline{f(z)}z$.

(unicidad) Ahora mostramos la unicidad.Supongamos que $(\forall x \in X)\ f(x) = \langle x, y_1\rangle = \langle x, y_2\rangle$. Entonces $(\forall x \in X)\ \langle x, y_1 - y_2\rangle = 0$. Por lo tanto $y_1 = y_2$, por el Proposición 2.1.7. $\square$

De la demostración anterior se tiene también que

Lema 2.1.24. *Para $f \in X^*$ no nulo, $dim(N(f)^{\perp}) = 1$.*

Ahora mostramos la existencia del **operador adjunto** T^* de un operador T.

Teorema 2.1.25. *Sea X espacio de Hilbert y sea $T \in \mathcal{L}^*(X)$. Entonces, existe un único $T^* \in \mathcal{L}^*(X)$, tal que*

$$(\forall x, y \in X)\ \langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle.$$

Además, $\|T^*\| = \|T\|$.

Demostración. Para cada $y \in X$ fijo, $x \mapsto \langle T(x), y\rangle$ es lineal y acotada, entonces por el Teorema de Representación de Riesz, existe un único $y' \in X$ con $\langle T(x), y\rangle = \langle x, y'\rangle$ para toda $x \in X$. Definamos pues T^* como la asignación $y \mapsto y'$. Aplicando la regla $\langle T(v), w\rangle = \langle v, T^*(w)\rangle$, encontramos que

$$\langle v, T^*(\lambda x + y)\rangle = \langle v, \lambda T^*(x) + T^*(y)\rangle$$

para toda $v \in X$, de lo cual se sigue que T^* es lineal. Finalmente, usando el Lema 2.1.2,

$$\|T^*\| = \sup_{\|y\|=1} \|T^*(y)\| = \sup_{\|y\|=1} \sup_{\|x\|=1} |\langle x, T^*(y)\rangle| = \sup_{\|x\|=1} \sup_{\|y\|=1} |\langle T(x), y\rangle| = \|T\|.$$

Pudimos intercambiar $\sup_{\|x\|=1} \sup_{\|y\|=1}$ porque $|\langle x, y\rangle| \geq 0$. □

Proposición 2.1.26. *Sean $T, T_1, T_2 \in \mathcal{L}^*(X)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces*
(i) $(\lambda T_1 + T_2)^* = \overline{\lambda} T_1^* + T_2^*$
(ii) $(T_1 \circ T_2)^* = T_2^* \circ T_1^*$
(iii) $(T^*)^* = T$
(iv) $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

En lo sucesivo denotamos la composición $T_1 \circ T_2$ como T_1T_2.

Definición 2.1.27. Sea X un espacio con producto interno.
(i) $T \in \mathcal{L}^*(X)$ es **autoadjunto** si $T^* = T$,
(ii) $T \in \mathcal{L}^{\#}(X)$ es **Hermitiano** (ó **simétrico**) si $(\forall x, y \in X)\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$.

Mostramos ahora que, sin saber que es acotado, la propiedad de ser Hermitiano implica que el operador es acotado.

Teorema 2.1.28. *Sea X un espacio de Hilbert, y sea $T \in \mathcal{L}^{\#}(X)$ tal que $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle$ para todos $x, y \in X$. Entonces T es un operador acotado, y por ende autoadjunto.*

Demostración. Para cada $y \in X$ de norma uno, definimos $T_y(x) = \langle T(x), y\rangle$, sabemos que T_y es lineal porque T y $\langle \cdot, y\rangle$ son lineales. La hipótesis $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle$ y la desigualdad de Cauchy-Schwarz dan

$$|T_y(x)| = |\langle T(x), y\rangle| = |\langle x, T(y)\rangle| \leq \|x\|\|T(y)\|,$$

por lo que T_y es funcional acotado, pues $\|T_y\| \leq \|T(y)\|$. Además, tomando $x := T(y)/\|T(y)\|$ vemos que de hecho $\|T_y\| = \|T(y)\|$.

Además, para todo $y \in X$ de norma uno y para cada $x \in X$,

$$|T_y(x)| = |\langle T(x), y\rangle| \leq \|T(x)\|,$$

por lo que

$$\sup_{\|y\|=1} |T_y(x)| \leq \|T(x)\| < \infty.$$

Por el Teorema de Banach-Steinhaus, $\sup_{\|y\|=1} \|T_y\| < \infty$. Pero, usando la Proposición 2.1.7

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \sup_{\|y\|=1} |\langle T(x), y\rangle| = \sup_{\|y\|=1} \sup_{\|x\|=1} |\langle T(x), y\rangle| \\ &= \sup_{\|y\|=1} \|T_y\|. \end{aligned}$$

Por lo tanto T es acotado. □

Ejemplo 2.1.29. Sea $X := L_2[0,1]$ y $T : X \to X$ definido como

$$Tx(t) := \int_0^1 k(s,t)x(s)ds, \; t \in [0,1],$$

donde k es continua en $[0,1] \times [0,1]$. Resulta que T es acotado y existe un único adjunto. Para encontrar T^* usamos que $\langle T^*x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$, i.e.

$$\int_0^1 T^*x(s)\overline{y(s)}ds = \int_0^1 x(s)\overline{\int_0^1 k(t,s)y(t)dt}ds$$

(y usando los Teoremas de Fubini y de Tonelli, vea el apéndice)

$$= \int_0^1 \int_0^1 \overline{k(t,s)}x(s)ds\overline{y(t)}dt.$$

Por lo tanto $T^*x(t) = \int_0^1 \overline{k(t,s)}x(s)ds, \; t \in [0,1]$.

Ahora queremos encontrar una base ortonormal para $L_2[-\pi,\pi]$ y ver la relación entre bases completas y conjuntos densos. Para estos fines tenemos primero algunos resultados que son además de interés general.

Proposición 2.1.30. *Sea $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ conjunto ortonormal en un espacio X con producto interno. Si $u := \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ es convergente en X, entonces $c_k = \langle u, e_k\rangle$.*

Demostración. Para $m \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\langle u, e_m\rangle = \langle \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, e_m\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, e_m\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k \langle e_k, e_m\rangle = c_m.$$

□

Proposición 2.1.31. *Sea X un espacio de Hilbert, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ un conjunto ortonormal y $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$. Entonces $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ es convergente si y solo si $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ es convergente.*

Demostración. Primero, si $u := \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ es convergente, por la proposición anterior, $c_k = \langle u, e_k\rangle,\ k = 1, 2, \ldots$; y por la desigualdad de Bessel $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|u\|^2 < \infty$. Para suficiencia notemos que para $n > m$,

$$\| \sum_{k=1}^{n} c_k e_k - \sum_{k=1}^{m} c_k e_k \|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2.$$

□

Teorema 2.1.32. *Sea X un espacio con producto interno y $E \subset X$ conjunto ortonormal. Considere el problema de optimización para un conjunto $e_1, \ldots e_n \in E$ dado:*

$$\inf \left\{ \left\| u - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right\|^2 : c_k \in \mathbb{K} \right\}$$

con $u \in X$ fijo. Entonces, se alcanza el mínimo solo cuando $c_k = \langle u, e_k\rangle$ para $k = 1, \ldots, n$.

Demostración. Notemos que

$$\begin{aligned} \left\langle u - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, u - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right\rangle &= \langle u, u\rangle - \sum_{k=1}^{n} \overline{c_k}\langle u, e_k\rangle - \sum_{k=1}^{n} c_k \langle e_k, u\rangle + \sum_{k=1}^{n} \overline{c_k} c_k \\ &= \|u\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle u, e_k\rangle|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle u, e_k\rangle - c_k|^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto se alcanza un único minimo cuando $c_k = \langle u, e_k\rangle,\ k = 1, \ldots, n$. □

Teorema 2.1.33. *Sea X espacio con producto interno y $E := \{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ conjunto ortonormal. Entonces E es completo si y solo si $\langle E\rangle$ es denso en X.*

Demostración. La necesidad es fácil verla. Mostremos pues la suficiencia. Sea $u \in X$ arbitrario, entonces suponiendo que $\langle E\rangle$ es denso, hay $\{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \langle E\rangle$ tal que $(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n \geq N)\|w_n - u\| < \epsilon$. Cada w_n es de la forma $\sum_{k=1}^{m_n} c_k(n) e_k$, con $m_n \in \mathbb{N}$ y $\{c_k(n)\}_{k=1}^{m_n} \subset \mathbb{K}$ para cada $n = 1, 2, \ldots$. Por el teorema anterior

$$\left\| u - \sum_{k=1}^{m_n} \langle u, e_k\rangle e_k \right\| \leq \left\| u - \sum_{k=1}^{m_n} c_k(n) e_k \right\|.$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty} \left\| u - \sum_{k=1}^{m_n} \langle u, e_k\rangle e_k \right\| = 0;$$

por el teorema de bases ortonormales E es completo. □

Teorema 2.1.34. *El conjunto*

$$E := \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

es ortonormal y $\langle E \rangle$ es denso en $X := L_2[-\pi,\pi]$, por lo que E es también una base de X.

Para mostrar este teorema usaremos los siguiente hechos:
i) Que $C[-\pi,\pi]$ es denso en X con la norma $\| \cdot \|_2$.
ii) Del Teorema de Weierstrass (vea el apéndice), $\langle E \rangle$ es denso en $\{f \in C[-\pi,\pi] : f(-\pi) = f(\pi)\}$ con la norma $\| \cdot \|_\infty$.

Demostración. Sea $u \in X$ y $\epsilon > 0$. Por el punto i) anterior, hay $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ continua tal que $\|u - f\|_2 < \epsilon/2$. Más aún, podemos suponer que $f(-\pi) = f(\pi)$. Ahora, por ii), hay $g \in \langle E \rangle$ tal que $\|f - g\|_2 \leq 2\pi \|f - g\|_\infty^2 < \epsilon/2$, luego $\|u - g\|_2 < \epsilon$. Por lo tanto $\langle E \rangle$ es denso en X. Usando usando las identidades

$$\begin{aligned}
\sin(a)\sin(b) &= \frac{1}{2}\cos(a-b) - \frac{1}{2}\cos(a+b), \\
\cos(a)\cos(b) &= \frac{1}{2}\cos(a-b) + \frac{1}{2}\cos(a+b), \\
\sin(a)\cos(b) &= \frac{1}{2}\sin(a-b) + \frac{1}{2}\sin(a+b),
\end{aligned}$$

se puede mostrar la ortogonalidad del conjunto □

Se sigue del Ejercicio 2.3.13 que

Corolario 2.1.35. *Se tiene que $L_2[-\pi,\pi]$ es separable.*

Corolario 2.1.36. *Para toda $f \in L_2[-\pi,\pi]$,*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t), \ \ t \in [-\pi,\pi],$$

donde $p_k(t) := a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$ y

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\cos(ks)ds,$$

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\sin(ks)ds, \ \ y$$

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(s)ds.$$

A las combinaciones finitas de las funciones p_k's se les llaman los polinómios trigonométricos.

2.2 Métodos de proyección

En esta sección vemos como efectuar aproximaciones para resolver ciertos problemas en dimensión infinita con otro en dimensión finita.

Definición 2.2.1. Sea X un ELN. Una transformación $P \in \mathcal{L}^*(X)$ es una **proyección** si es idempotente, esto es que $P \circ P = P$.

Ejemplo 2.2.2. i) $P :=$ *indentidad.*
ii) Sea X un espacio con producto interno y $\{e_k\}_{k=1}^n \subset X$ conjunto ortonormal, i.e. $\langle e_i, e_j\rangle$ es 1 si $i = j$ y 0 si $i \neq j$. Entonces $P(x) := \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k$ define una proyección.

Teorema 2.2.3. *Sea P una proyección en un ELN X. Entonces $x \in X$ es un punto fijo de P si y solo si $x \in R(P)$ (el rango de P).*

Proof. La necesidad es directa. Para la suficiencia, si $x \in R(P)$, hay $v \in X$ tal que $Pv = x$, y como P es proyección $x = Pv = PPv = Px$. □

Con esto podemos mostrar que

Teorema 2.2.4. *Si P es una proyección, entonces $I-P$ es también proyección. Además $R(P) = N(I-P)$ y $N(P) = R(I-P)$.*

Teorema 2.2.5. *En un ELN X sea $T \in \mathcal{L}^*(X)$ con rango V tal que $dimV < \infty$. Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base de V, entonces existe $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset \mathcal{L}^*(X, \mathbb{K})$ tal que $T(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)e_k$.*

Demostración. De la Proposición 1.1.16 sabemos que cualquier $g \in \mathcal{L}^*(V, \mathbb{K})$ es de la forma $g(v) = \sum_{k=1}^n \lambda_k\mu_k$ donde $v = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \in V$. Definimos funcionales sobre V como $g_i(v) = \lambda_i,\ i = 1, \ldots, n$, donde $v = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \in V$. Así

$$g_i(e_j) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i. \end{cases}$$

Entonces tenemos que

$$(\forall v \in V)v = \sum_{k=1}^n g_k(v)e_k.$$

Como $T(X) = V$, para toda $x \in X$,

$$Tx = \sum_{k=1}^n g_k(Tx)e_k,$$

pero $f_k := g_k \circ T$ es lineal y acotada para cada $k = 1, \ldots, n$. Esto es entonces

$$(\forall x \in X)Tx = \sum_{k=1}^\infty f_k(x)e_k, \text{ con } f_k \in \mathcal{L}^*(X, \mathbb{K}),\ k = 1, \ldots, n.$$

□

Nota 2.2.6. En el teorema anterior, si T es proyección, como $e_k \in V$ son puntos fijos de T,

$$f_k(e_i) = g_k(T(e_i)) = \begin{cases} 1 & k = i \\ 0 & k \neq i. \end{cases}$$

Al par $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y $\{f_1, \ldots, f_n\}$ se le llama **sistema** o **familia biortonormal**.

Ejemplo 2.2.7. (Proyección con polinomios de Lagrange). Consideremos $\Pi_{n-1} \subset C[a, b]$ los polinomios de grado $\leq n-1$. Notese que $\dim(\Pi_{n-1}) = n$. Sea $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset [a, b]$ estrictamente creciente y definamos

$$e_i(s) := \Pi_{j\neq i}\frac{s - t_j}{t_i - t_j},\ i = 1, \ldots, n.$$

Así, $\{e_i\}_{i=1}^n$ forma una base de Π_{n-1}, además

$$e_i(t_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Por lo que $\{e_i, t_i^*\}_{i=1}^n$ forma una familia biortonormal, donde $t_i^* \in \mathcal{L}^*(C[a, b], \mathbb{R})$ está definido como $t_i^*(f) := f(t_i)$ para cada $f \in C[a, b]$. A t_i^* se le llama **funcional de evaluación**.

De lo anterior se sigue que

$$P_n(f)(t) := \sum_{i=1}^{n} f(t_i)e_i(t),\ t \in [a, b]$$

es una proyección de $C[a, b]$ a Π_{n-1}. Este es un ejemplo particular de un **método colocación**.

En un espacio lineal X podemos definir una proyección P usando una familia biortonormal $\{e_i, f_i\}_{i=1}^n$ como sigue

$$(\forall x \in X)P(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)e_i.$$

Sea $T : X \to X$ un operador en $\mathcal{L}^*(X)$. El **método de la proyección** para resolver $Tx = x$, con $x \in X$, consiste en proyectar el problema en un subespacio $V \subset X$ donde sea más fácil resolverlo. Esto es, si $P : X \to V$ es una proyección, podemos intentar resolver $P \circ T(v) = P(v)$, i.e. concontrar $v \in V$ tal que $P(T - I)v = 0$.

Así pues, si $V_1 \subset V_2, \ldots, X$ es una sucesión de subespacios de X ELN, y $P_n : X \to V_n$ proyecciones. Entonces podemos construir x_n tal que $P_n(T - I)x_n = 0$, esperando que x_n converja al punto $x \in X$ donde $Tx = x$.

Nota 2.2.8. Dado V subespacio vectorial de X y dado $x \in X$, una proyección puede servir para aproximar el elemento de V más cercano a x, es decir, si consideramos el problema de optimización

$$dist(x, V) := \inf_{v\in V}\{\|x - v\|\},$$

entonces podemos aproximar la solución (i.e. donde se alcanza el ínfimo) tomando $P(x)$, donde $P : X \to V$ es una proyección.

Nota 2.2.9. Si X es un espacio con producto interno y $\{e_k\}_{k=1}^n$ es base ortonormal de $V_n \subset X$, ya teniamos por el Teorema 2.1.32 y por el Ejemplo 2.2.2 que

$$dist(x, V_n) = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\| = \|x - P_n(x)\|.$$

Además, si $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ es una base de X, vemos que $\lim_{n\to\infty} dist(x, V_n) = 0$. Consideramos las proyecciones $P_n(x) := \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k,\ n = 1, 2, \ldots$.

El siguiente resultado nos dice como controlar el error $\|x - Px\|$ en un contexto más general.

Teorema 2.2.10. *Sea V subespacio de X ELN y $P : X \to V$ una proyección, entonces*

$$(\forall x \in X)\|x - Px\| \leq \|I - P\| dist(x, V).$$

Demostración. Para $v \in V$ se tiene que $Pv = v$, luego

$$\|x - Px\| = \|x - v - P(x - v)\| = \|(I - P)(x - v)\| \leq \|I - P\|\|x - v\|.$$

Al tomar el infimo sobre $v \in V$ se tiene el resultado. □

Teorema 2.2.11. *Sea $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de proyecciones en un espacio de Banach X y asumamos que $(\forall x \in X)P_n(x) \to x$ cuando $n \to \infty$. Sea $u \in X$ y $T \in \mathcal{L}^*(X)$. Si $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ es tal que $P_n(Tx_n - u) = 0$ y $x_n \to x \in X$ cuando $n \to \infty$, entonces $Tx = u$.*

Demostración. Como $P_n(x) \to x$, también $\|P_n(x)\| \to \|x\|$, luego

$$\sup_{n\geq 1} \|P_n(x)\| < \infty$$

para cada $x \in X$. Como X es de Banach, por el Teorema de Banach-Steinhaus, $\sup_{n\geq 1} \|P_n\| < \infty$. Por otro lado, como T es continua $T(x_n) \to T(x)$. Por hipótesis, $P_nTx_n = P_nx$, luego de la desigualdad

$$\|P_n(u - Tx)\| = \|P_n(Tx_n - Tx)\| \leq \|P_n\|\|Tx_n - Tx\|,$$

tenemos entonces que $0 = \lim_{n\to\infty} \|P_n(u - Tx)\| = \|u - Tx\|$. □

Ejemplo 2.2.12. (**método de Galerkin**, ver Nota 2.2.9) Sea X espacio de Hilbert y $\{e_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ base ortonormal. Sea también $T \in \mathcal{L}^*(X)$ y $u \in X$ fijo. Buscamos $x = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k e_k$ tal que $T(x) = u$. Consideramos las proyecciones $P_n(x) := \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k,\ n = 1, 2, \ldots$. Así,

$$\begin{aligned} P_n(u) = P_n(T(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_n(T(e_k)) &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sum_{i=1}^{n} \langle Te_k, e_i \rangle e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle Te_k, e_i \rangle e_i. \end{aligned}$$

De aqui podemos buscar $\lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_n^{(n)}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \langle Te_k, e_i \rangle e_i,$$

lo cual se reduce a un sistema lineal finito de ecuaciones.

Definición 2.2.13. Sea X un espacio de Banach. Una sucesión $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ es una **base de Schauder** si para todo $x \in X$ existen únicos $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$ tal que $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$ (i.e. $\lim_{n\to\infty} \|x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\| = 0$).

Ejemplo 2.2.14. i) Para $X := (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$. Definimos $e_0(t) := t,\ e_1(t) = t$ y para $n \geq 2$ sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $2^{m-1} < n < 2^m$, así

$$e_n(t) := \begin{cases} 2^m \left(t - \frac{2n-2}{2^m} - 1\right) & \frac{2n-2}{2^m} \leq t < \frac{2n-1}{2^m} - 1 \\ 1 - 2^m \left(t - \frac{2n-1}{2^m} - 1\right) & \frac{2n-1}{2^m} \leq t < \frac{2n}{2^m} - 1 \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

Se sabe que $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una base de Schauder para X.

ii) Para $L_p[0,1]$ con $1 \leq p < \infty$ se puede construir su base de Schauder, llamdada **base de Haar**.

2.3 Ejercicios

2.3.1. Demuestre que no hay un producto interno en el espacio $(C[a,b], \|\bullet\|_\infty)$ que genera la norma.

2.3.2. Verifique que el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt cumple lo deseado.

2.3.3. ¿Son las funciones real valuadas $C[-1,1]$ un espacio de Hilbert con el producto interno $\int_{-1}^{1} f(s)g(s)ds$? Diga porque.

2.3.4. Sea X espacio con producto interno, y $y \in X$ fijo. ¿Es la función $x \mapsto \langle x, y \rangle$ un operador acotado?

2.3.5. ¿Es $\{1, cos(nt), sen(nt)\}_{n=1}^{\infty}$ un conjunto ortogonal usando el producto interno $\int_{-r}^{r} f(t)g(t)dt$?

2.3.6. Sea $X := L_2[-\pi, \pi]$ y $f(t) := \frac{\chi_{\{[0,\pi]\}}(t)}{t}$, donde χ_A es la función indicadora del conjunto A. Demuestre que $f \notin X$, más aún, demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) = \frac{\pi}{2}.$$

2.3.7. ¿Cuáles de las siguientes dos son series de Fourier en $L_2[-\pi, \pi]$,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{\log(n)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{n}?$$

2.3.8. Demuestre que $f_n(t) := \frac{1}{2} + \cos(t) + \cos(2t) + \ldots + \cos(nt) = \frac{\sin\left(nt + \frac{t}{2}\right)}{2\sin(t/2)}$.

2.3.9. Del ejercicio anterior, concluya que f_n no converge puntualmente para cada $t \in [-\pi, \pi]$. A f_n se le llama el kernel de Dirichlet.

2.3.10. Sea $E := \{\cos(nt)\}_{n=0}^{\infty}$. ¿ Es E base ortogonal de $L_2[0, \pi]$? ¿Es $\langle E \rangle$ denso en $L_2[0, \pi]$

2.3.11. ¿Es la función $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{\log(n)}$ cuadrado integrable sobre $[0, \pi]$?

2.3.12. Sea $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ una función continua. Diga cuales son los coeficientes $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ que minimizan

$$\int_0^{\pi} \left(f(t) - \sum_{k=2}^{n} \lambda_k \frac{\cos(kt)}{\log(k)} \right)^2 dt.$$

2.3.13. Muestre el siguiente teorema. Sea X un espacio con producto interno sobre $\mathbb{R}$. Entonces X es separable si y sólo si X tiene una base ortonormal numerable

2.3.14. Resuelva

$$x(t) = \sin(t) + \int_0^{\pi} (t^2 + s^2) x(s) ds.$$

Sugerencia: Proponga un subespacio de dimensión finita donde se pueda resolver.

2.3.15. Sean p y q polinomios reales y $a, b \in \mathbb{R}$. ¿Hay subespacio de dimensión finita donde

$$x(t) = a\cos(t) + b\sin(t) + \int_0^{\pi} (p(t) + q(s)) x(s) ds$$

pueda tener solución?

2.3.16. ¿Cómo propondría una proyección de rango finito en un espacio de Banach con base de Schauder? ¿Cuál sería el método de Galerkin en este contexto?

2.3.17. Sea $\phi \in C[0, 1]$ tal que $(\forall t \in [0, 1])\phi(t) > 0$. Defina el operador

$$[Tx](t) := \int_0^1 k(s, t) x(s) ds, \; t \in [0, 1],$$

donde $k(s, t) := \phi(s)/\phi(t)$. Diga si T es una proyección.

2.3.18. Diga si la norma de una proyección es 1, < 1 o > 1.

2.3.19. Diga si puede aplicar el Teorema 2.2.11 al Ejemplo 2.2.7 para $u \in C[a, b]$ y $T \in \mathcal{L}^*(C[a, b])$.

2.3.20. Del Ejemplo 2.2.12, suponga que $T(x) = u$ tiene solución única. Muestre o de un contraejemplo de que $x_n \to x$, donde

$$x_n := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} e_k.$$

2.3.21. Considere el problema de frontera

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = f(t), \;\; x(0) = x(1) = 0.$$

Proponga un método de proyección para aproximar su solución, justificando convergencia.

Capítulo 3

Teoría de Operadores Compactos

Sean X, Y ELNs de dimensión infinita, y sean $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{L}^*(X, Y)$ de rango finito. Supongamos que $T_n \to T$ y que $R(T_n) \to \infty$ cuando $n \to \infty$, para algún operador T. Una pregunta natural es ver que propiedades hereda T del hecho de que $R(T_n) < \infty$ para cada n. El concepto de operador compacto ayuda a responder esta pregunta.

3.1 Propiedades generales

Definición 3.1.1. Un operador entre ELNs es **compacto** si envía todo conjunto acotado a uno relativamente compacto (i.e. que la cerradura es compacta).

El siguiente resultado nos muestra una alternativa para definir un operador compacto.

Proposición 3.1.2. *Sean X y Y ELNs, y sea $T \in \mathcal{L}^{\#}(X, Y)$. Entonces, T es compacto si y sólo si para toda sucesión acotada $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$, la imagen $\{T(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente en Y.*

Proposición 3.1.3. *Sean X y Y ELNs, y sea $T\colon X \to Y$ lineal y compacto. Entonces T es acotado.*

Demostración. Si T no fuera acotado, existiría $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ con $\|x_n\| = 1$ para todo n, tal que $\|T(x_n)\| \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Entonces $\{T(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ no tendría una subsucesión convergente y T no sería compacto. □

Proposición 3.1.4. *Un operador lineal (sobre un ELN X) de rango finito es compacto.*

Demostración. Si $A \subset X$ es acotado, $T(A)$ es acotado en $R(T)$, luego por el Teorema de Heine-Borel[1], es relativamente compacto. □

[1] Un conjunto en un ELN de dimensión finita es compacto si y solo si es cerrado y acotado.

Teorema 3.1.5. *Sea $X := (C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$. Si $k \in C([a,b]\times[a,b])$, entonces el operador*

$$(Tx)(t) := \int_a^b k(s,t)x(s)ds, \ x \in X,$$

es compacto.

Demostración. Sea $A \subset X$ acotado, i.e. $(\exists M < \infty)(\forall x \in A)\|x\|_\infty < M$. Así

$$(\forall x \in A)(\forall t \in [a,b])|(Tx)(t)| \leq M(b-a) \max_{s,t\in[a,b]} k(s,t),$$

por lo tanto $T(A)$ es acotado.

También, como k es uniformemente continuo en $[a,b]\times[a,b]$,

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall s \in [a,b])|k(s,t_1) - k(s,t_2)| < \frac{\epsilon}{(b-a)M},$$

siempre y cuando $|t_1 - t_2| < \delta$ con $t_1, t_2 \in [a,b]$.

Entonces,

$$|(Tx)t_1 - (Tx)t_2| = |\int_a^b (k(s,t_1) - k(s,t_2))x(s)ds| < \epsilon$$

para toda $x \in A$ y todos $t_1, t_2 \in [a,b]$ con $|t_1 - t_2| < \delta$. Es decir, $T(A)$ es equicontinuo (de hecho uniformemente equicontinuo), y por el Teorema de Arzelá-Ascoli $T(A)$ es relativamente compacto. Concluimos que T es compacto. □

Los siguientes resultados ayudan en particular a ver que el conjunto de operadores compactos forman un espacio de Banach.

Proposición 3.1.6. *Sean X, Y, Z ELNs.*

(i) Sean $T_1, T_2 \colon X \to Y$ operadores compactos. Entonces $\lambda T_1 + T_2$ es también compacto para todo escalar λ.

(ii) Sean $T_1 \colon X \to Y$, $T_2 \colon Y \to Z$ operadores compactos. Si $R(T_1) \subseteq D(T_2)$, entonces $T_2 \circ T_1$ también es compacto.

Teorema 3.1.7. *Sea X ELN y sea Y espacio de Banach. Sean $T_k \in \mathcal{L}^*(X,Y)$ compactos tales que $T_k \to T$ cuando $k \to \infty$. Entonces, $T \in \mathcal{L}^*(X,Y)$ es compacto.*

Demostración. Sea $\{x_n\} \subseteq X$ acotado: $\|x_n\| \leq M < \infty$. Recordemos que para un subconjunto infinito de índices $I \subseteq \mathbb{N}$, $\{x_n\}_{n\in I}$ es una subsucesión de $\{x_n\}$, y si $I' \subseteq I$ con I' también infinito, entonces $\{x_n\}_{n\in I'}$ es una subsubsucesión. Por ser T_1 compacto, hay $I_1 \subseteq \mathbb{N}$ infinito tal que $\{T_1(x_n)\}_{n\in I_1}$ converge en Y. Como T_2 es compacto, hay $I_2 \subseteq I_1$ infinito tal que $\{T_2(x_n)\}_{n\in I_2}$ converge en Y. Sucesivamente construimos I_k $(k = 1, 2 \ldots)$ con $I_{k+1} \subseteq I_k$ y tal que $\{T_k(x_n)\}_{n\in I_k}$ converge en Y. Defínase n_k como el k-ésimo elemento de I_k;

observemos que $n_{k+1} > n_k$. Escribiremos $z_k = x_{n_k}$ para $k = 1, 2, \ldots$ Luego para cualesquier i, j, k,

$$\begin{aligned} \|T(z_i) - T(z_j)\| &\leq \|T(z_i) - T_k(z_i)\| + \|T_k(z_i) - T_k(z_j)\| + \|T_k(z_j) - T(z_j)\| \\ &\leq 2M\|T - T_k\| + \|T_k(z_i) - T_k(z_j)\|. \qquad (*) \end{aligned}$$

Sea $\epsilon > 0$. Puesto que $T_k \to T$, existe k tal que $\|T - T_k\| < \epsilon/4M$.

Ahora bien, como la sucesión $\{T_k(x_n)\}_{n \in I_k}$ es de Cauchy, podemos tomar $N > k$ tal que $\|T_k(z_i) - T_k(z_j)\| = \|T_k(x_{n_i}) - T_k(x_{n_j})\| < \epsilon/2$ para $i, j \geq N$. Entonces por $(*)$,

$$\|T(z_i) - T(z_j)\| < \epsilon \text{ para } i, j \geq N.$$

Luego $\{T(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, y converge por ser Y completo. Estamos pues diciendo que $\{T(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente, por lo tanto T es compacto. □

Para el siguiente resultado usaremos lo siguiente:
i) Consideramos (G, Ω, μ) un espacio con medida y $L^2(G)$ el espacio de Hilbert con producto interno $\langle f, g\rangle := \int_G f(s)\overline{g(s)}\mu(ds)$ y con una base numerable.
ii) El espacio $l_2 := \{(a_n)_{n=1}^{\infty} : a_n \in \mathbb{K},\ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}$ es de Hilbert con el producto interno $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}$. Notemos que $l_2 = L^2(G)$ con $G = \mathbb{N}$, $\Omega = \mathcal{P}(G)$ y μ la medida del conteo. En particular la desigualdad de Cauchy-Schwarz establece que

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}\right|^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2\right).$$

Teorema 3.1.8. *Sea (G, Ω, μ) un espacio con medida. En $L^2(G)$ consideramos el operador*

$$(Tx)(t) := \int_G k(s,t)x(s)ds,\ x \in L^2(G).$$

Si k está en el espacio $L^2(G \times G)$, entonces $T : L^2(G) \to L^2(G)$ es compacto.

Demostración. Sea $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ base ortonormal de $L^2(G)$ y definamos $a_{mn} := \langle Te_m, e_n\rangle$. Para toda $x \in L^2(G)$ $x = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n$ y como $Tx \in L^2(G)$,

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\langle Tx, e_n\rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty}\langle \sum_{m=1}^{\infty}\langle x, e_m\rangle Te_m, e_n\rangle e_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\langle x, e_m\rangle\langle Te_m, e_n\rangle e_n. \end{aligned}$$

Así los operadores

$$T_k(x) := \sum_{n=1}^{k}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}\langle x, e_m\rangle e_n$$

son de rango finito, luego compactos. Por lo que

$$Tx - T_k x = \sum_{n=k+1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}\langle x, e_m\rangle e_n.$$

Por la identidad de Parseval en $L^2(G)$ y la desigualdad de Cauchy-Schwarz en l_2 se tiene que

$$\begin{aligned}\|Tx - T_kx\|^2 &= \sum_{n=k+1}^{\infty}\left|\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}\langle x, e_m\rangle\right|^2 \le \sum_{m=1}^{\infty}|\langle x, e_m\rangle|^2 \sum_{n=k+1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}|a_{mn}|^2\right)\\ &= \|x\|^2 \sum_{n=k+1}^{\infty} b_n,\end{aligned}$$

donde $b_n := \sum_{m=1}^{\infty}|a_{mn}|^2,\ n = 1, 2, \ldots$. Defina $k_t(s) := k(s,t)$, entonces usando el Teorema de Fubini tenemos que

$$\begin{aligned}\|k\|^2 &= \int\int |k(s,t)|^2\mu(ds)\mu(dt) = \int \|k_t\|^2\mu(dt) = \int \sum_{m=1}^{\infty}|\langle k_t, e_m\rangle|^2\mu(dt)\\ &= \int \sum_{m=1}^{\infty}\left|\int_G k_t(r)\overline{e_m(r)}\mu(dr)\right|^2 \mu(dt) = \int \sum_{m=1}^{\infty}|[T\overline{e_m}](t)|^2\mu(dt)\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\int |T(e_m)(t)|^2\mu(dt) = \sum_{m=1}^{\infty}\|Te_m\|^2\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|\langle Te_m, e_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|a_{mn}|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n,\end{aligned}$$

por lo que $\sum_{n=k+1}^{\infty} b_n \to 0$ cuando $k \to \infty$. Por lo tanto $(\forall x \in L^2(G))\|Tx - T_kx\| \to 0,\ k \to \infty$, y por el teorema anterior T es compacto. □

Sabemos que el límite de operadores compactos es compacto, y que los operadores lineales de rango finito son compactos. Ahora veremos, bajo ciertas condiciones, que un operador compacto es el límite de operadores de rango finito.

Recordemos que $\{a_k\}$ es una base de Schauder para un espacio lineal Y cuando para todo $y \in Y$ existen únicos escalares $\lambda_k(y)$ tales que $y = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(y)a_k$. Se puede verificar que $\lambda_k \colon Y \to \mathbb{K}$ son funcionales lineales $(k = 1, 2, \ldots)$.

Lema 3.1.9. *Sean X y Y ELNs. Sea $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}^*(X,Y)$ tal que $(\forall n)\|T_n\| < M < \infty$, y sea $K \subseteq X$ un subconjunto compacto. Si $(\forall x \in K)$ $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = 0$, entonces la convergencia es uniforme en K, i.e.*

$$\sup_{x\in K}\|T_n(x)\| \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

Demostración. Supongamos que la convergencia no es uniforme: existen $\epsilon > 0$, $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ estrictamente creciente, y $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq K$ tal que $\|T_{n_k}(x_k)\| \ge \epsilon$ para $k = 1, 2, \ldots$ Como K es compacto, podemos suponer que $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge a un punto $x \in K$. Sin embargo, para cada k tenemos

$$\|T_{n_k}(x)\| \ge \|T_{n_k}(x_k)\| - \|T_{n_k}(x) - T_{n_k}(x_k)\| \ge \epsilon - \|T_{n_k}\|\|x - x_k\|$$

por lo que $\lim_{k\to\infty}\|T_{n_k}(x)\| \ge \epsilon$, lo cual contradice la hípotesis. Por lo tanto la convergencia es uniforme en K. □

Teorema 3.1.10. ***(Teorema de Schauder)*** *Sean X y Y espacios de Banach. Si Y tiene una base de Schauder, entonces todo operador compacto en $\mathcal{L}^*(X,Y)$ es el límite de operadores con rango finito.*

Demostración. Sea $T \in \mathcal{L}^*(X,Y)$ compacto y sea $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ una base de Schauder de Y. Defina $P_n : Y \to Y$ como

$$P_n(y) := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(y) a_k.$$

Notemos que $I - P_n$ es lineal y se cumple $\lim_{n\to\infty}(I - P_n)(y) = 0$ para cada $y \in \overline{T(B_1(0))} =: K$, además $\{I - P_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un sucesión acotada por el Teorema de Banach-Steinhaus. Como K es compacto, por el lema anterior la convergencia es uniforme en K. Por lo tanto

$$\sup_{x\in B_1(0)} \|(I - P_n) \circ T(x)\| \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

Esto nos dice que $\|T\| = \lim_{n\to\infty} \|P_n \circ T\|$, y observamos que $\{P_n \circ T\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de operadores lineales de rango finito que convergen a T en norma.
$\square$

3.2 Alternativa de Fredholm

Queremos estudiar ecuaciones de la forma $(I + T)x = y$ con T compacto y y dado, o econtrar x tal que $Tx = x$. El siguiente resultado es de gran utilidad para estos propositos.

Lema 3.2.1. ***(de Riesz)*** *Sea X un ELN, $Y \subset X$ subespacio propio y cerrado, y $\alpha \in (0,1)$. Entonces existe un $x \in X$ de norma 1 tal que $\|x - y\| \geq \alpha$ para todo $y \in Y$, o en otras palabras $\|x - Y\| \geq \alpha$.*

Demostración. Sea $x_0 \in X - Y$ y sea $d = \inf_{y\in Y} \|x_0 - y\|$. Por ser cerrado Y, se tiene que $d > 0$. Tomemos $y_0 \in Y$ tal que $d \leq \|x_0 - y_0\| < d/\alpha$ y definimos $x = (x_0 - y_0)/\|x_0 - y_0\|$, el cual cumple lo deseado. $\square$

Teorema 3.2.2. *Sea X ELN. Entonces la identidad $I : X \to X$ es un operador compacto si y solo si $dimX < \infty$.*

Demostración. La suficiencia ya se tenía usando el Teorema de Heine-Borel. Para la necesidad, supongamos que X no es de dimensión finita. Tomemos $x_1 \in X$ de norma 1, luego $Y_1 := \langle\{x_1\}\rangle$ y es cerrado en X, por el Lema de Riesz hay $x_2 \in X$ de norma 1 tal que $\|x_2 - Y_1\| \geq 1/2$. Volvemos a aplicar el Lema de Riesz con $Y_2 := \langle\{x_1, x_2\}\rangle$ para encontrar x_3 de norma 1 tal que $\|x_3 - Y_2\| \geq 1/2$. Así sucesivamente creamos una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, todos de norma 1 y tal que $\|x_n - x_m\| \geq 1/2$ para $n \neq m$. Esto dice que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada pero que $\{I(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ no tiene subsucesión convergente, contradiendo que I es compacto, por lo tanto $dimX < \infty$. $\square$

Con lo anterior, podemos mostrar que $Tx - \lambda x = 0$ tiene un número finito de soluciones independientes cuando T es compacto y $\lambda \neq 0$.

Teorema 3.2.3. *Sea X ELN y $T \in \mathcal{L}^*(X)$ compacto, Entonces*

$$dim(N(T - \lambda I)) < \infty$$

para cualquier $\lambda \neq 0$.

Demostración. Si $x \in N(T - \lambda I)$, $Tx - \lambda x = 0$, pero también $(T - \lambda I)Tx = T(Tx - \lambda x) = 0$, por lo tanto $Tx \in N(T - \lambda I)$, o sea que $T(N(T - \lambda I)) \subset N(T - \lambda I)$. Además por ser T acotado (i.e. continuo), $N(T - \lambda I)$ es cerrado en X: si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset N(T - \lambda I)$ con $x_n \to x$, entonces $(T - \lambda I)x = \lim_{n\to\infty}(T - \lambda I)x_n = 0$ por lo tanto $x \in N(T - \lambda I)$.

Ahora notemos que el operador $T : N(T - \lambda I) \to N(T - \lambda I)$ es compacto: sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset N(T - \lambda I)$ acotada, entonces por ser T compacto hay subsucesión convergente, pero como $N(T - \lambda I)$ es cerrado el límite está en $N(T - \lambda I)$.

Finalmente, vemos que para todo $x \in N(T - \lambda I)$, $\frac{1}{\lambda}Tx = x$, o sea que $\frac{1}{\lambda}T : N(T - \lambda I) \to N(T - \lambda I)$ es la indentidad. Por el teorema anterior, $dimN(T - \lambda I) < \infty$. □

Proposición 3.2.4. *Sea X un ELN y $T \in \mathcal{L}^*(X)$ compacto. Entonces $(\forall \lambda \neq 0)R(T - \lambda I)$ es cerrado.*

Demostración. Sea $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R(T - \lambda I)$, y $y \in X$ tal que $y = \lim_{n\to\infty} y_n$; queremos pues probar que $y \in R(T - \lambda I)$. Si $y = 0$ entonces se cumple, así que supongamos que no es cero. Tomemos pues $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ tal que $(T - \lambda I)x_n = y_n$. Como $y \neq 0$, a lo más una cantidad finita de x_n's está en $N(T - \lambda I)$; así podemos removerlos y suponer realmente que $x_n \notin N(T - \lambda I)$ para toda n.

Bajo las hipótesis, por el resultado anterior sabemos que $dimN(T - \lambda I) < \infty$. Así, para todo n, $N(T - \lambda I)$ es cerrado en $\langle N(T - \lambda I) \bigcup \{x_n\}\rangle$. Usando el Lema de Riesz podemos construir $v_n := z_n + \alpha_n x_n$ de norma 1 y tal que $z_n \in N(T - \lambda I)$ y $dist(v_n, N(T - \lambda I)) \geq 1/2$.

Entonces como $(T - \lambda I)v_n = \alpha_n y_n$, $|\alpha_n|\|y_n\| = \|\alpha_n y_n\| = \|(T - \lambda I)v_n\| \leq \|T - \lambda I\|$, y como $y_n \to y \neq 0$, tenemos que $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotado. También, como $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada, $\{T(v_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tiene subsucesión convergente. Con todos estos puntos podemos considerar que hay subsucesiones donde se cumple que

$$T(v_{n_i}) \to w \in X \text{ y } \alpha_{n_i} \to \alpha \text{ cuando } i \to \infty.$$

Ya teniamos que $(T - \lambda I)v_{n_i} = \alpha_{n_i} y_{n_i}$, luego

$$v_{n_i} = \frac{1}{\lambda}Tv_{n_i} - \frac{\alpha_{n_i} y_{n_i}}{\lambda}.$$

Veamos que $\alpha \neq 0$. Si lo fuera, $v_{n_i} \to \frac{w}{\lambda}$, luego

$$(T - \lambda I)\frac{w}{\lambda} = \lim_{i\to\infty}(T - \lambda I)v_{n_i} = \lim_{i\to\infty} \alpha_{n_i} y_{n_i} = 0,$$

por lo que $w \in N(T - \lambda I)$. Pero entonces

$$\frac{1}{2} \leq dist(v_{n_i}, N(T - \lambda I)) \leq \|v_{n_i} - w/\lambda\| \to 0.$$

Esto es una contradicción la cual implica que $\alpha \neq 0$. Así pues, $(T-\lambda I)v_{n_i} \to \alpha y \neq 0$. Pero como $v_k \to w/\lambda - \alpha y/\lambda$, concluimos que

$$(T-\lambda I)(\frac{1}{\alpha}\frac{w}{\lambda} - \frac{y}{\lambda}) = y.$$

Como obviamente $\frac{1}{\alpha}\frac{w}{\lambda} - \frac{y}{\lambda} \in X$, lo anterior dice que $y \in R(T-\lambda I)$, como queriamos. $\square$

Teorema 3.2.5. *Sea X ELN, $T \in \mathcal{L}^*(X)$ compacto y $\lambda \neq 0$. Entonces $T-\lambda I$ es inyectivo si y solo si es sobreyectivo.*

Demostración. ($\Longleftarrow$) Sea $L := T-\lambda I$ y $X_n := N(L^n)$. Supongamos que L es sobre pero no inyectiva. Claramente $\{0\} \subset X_1 \subset X_2 \subset \ldots$. Veamos que $X_n - X_{n-1} \neq \{\emptyset\}$. Como suponemos que L no es inyectiva, podemos tomar $y_1 \in X_1 - \{0\}$. Como L es sobreyectiva, hay y_2 tal que $Ly_2 = y_1$, y y_3 tal que $Ly_3 = y_2$, etc. Así $L^n y_n = L^{n-1}y_{n-1} = \ldots = Ly_1 = 0$, sin embargo $L^{n-1}y_n = L^{n-2}y_{n-1} = \ldots = y_1 \neq 0$, por lo tanto $y_n \in X_n$ pero $y_n \neq X_{n-1}$. De esto vemos que $X_n \subset X_{n+1}$ propiamente.

Como cada X_n es cerrado, por el Lema de Riesz, hay $x_n \in X_n,\ n = 1,2,\ldots$ de norma 1 tal que $dist(x_n, X_{n-1}) \geq 1/2$. Luego, si $m > n$, entonces $L^m x_m = 0$, pues $x_m \in X_m := N(L^m)$, además que $L^{m-1}x_n = 0$ y $L^m x_n = 0$, pues $x_n \in X_n \subset X_{m-1} \subset X_m$. Esto muestra que $L^{m-1}(Lx_m - \lambda x_n - Lx_n) = 0$, i.e. $Lx_m - \lambda x_n - Lx_n \in X_{m-1}$. Así

$$\begin{aligned}\|Tx_n - Tx_m\| &= \|(L+\lambda I)x_n - (L+\lambda I)x_m\| = \|Lx_n + \lambda x_n - Lx_m - \lambda x_m\| \\ &= \|\lambda x_m + (Lx_m - \lambda x_n - Lx_n)\| \geq |\lambda| dist(x_m, X_{m-1}) \geq \frac{|\lambda|}{2}.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\{T(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ no puede tener subsucesión convergente, contradiciendo la compacidad de T. La conclusión es que L es inyectivo.

($\Longrightarrow$) Sea $L := T-\lambda I$ y $X_n := R(L^n)$. Si $x \in X_n$, hay $u \in X$ tal que $x = L^n u = L^{n-1}Lu \in X_{n-1}$, por lo que $X = X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \ldots$.

Resulta que si L no es sobreyectivo, la contención $X_k \supset X_{k+1}$ es propia para todo $k = 0,1,\ldots$. El primer caso $X_0 \supset X_1$ es fácil verlo por la definición de X_1. Veamos ahora que la contención $X_1 \supset X_2$ es propia: Si, $L(X) = LL(X)$, como L no es sobreyectivo, hay $u \notin L(X)$, pero obviamente $Lu \in L(X)$, por lo que $Lu \in LL(X)$, y esto implica que hay $v \in X$ tal que $Lu = LLv$. Sin embargo, como L es inyectiva, necesariamente $u = Lv$, contradiciendo que $u \notin L(X)$. Aplicando este argumento para cada contención, tenemos que todas las contenciones son propias.

Tenemos que

$$L^n = (T-\lambda I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T^k (-\lambda I)^{n-k} = (-\lambda)^n I + \sum_{k=1}^{n} (-\lambda)^{n-k} \binom{n}{k} T^k.$$

Entonces $L^n = \widehat{T} - \widehat{\lambda} I$ con $\widehat{T}$ compacto y $\widehat{\lambda} \neq 0$. Por la proposición anterior $X_n = R(L^n)$ es cerrado para $n = 1,2,\ldots$.

Podemos aplicar el Lema de Riesz y construir $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, con $x_n \in X_n$, tal que $\|x_n\| = 1$ y $dist(x_n, X_{n+1}) \geq 1/2$. Así, para $m > n$,

$$\begin{aligned} \|Tx_n - Tx_m\| &= \|(L+\lambda I)x_n - (L+\lambda I)x_m\| \\ &= \|\lambda x_n + (Lx_n - Lx_m - \lambda x_m)\| \geq |\lambda| dist(x_n, X_{n+1}) \geq \frac{|\lambda|}{2}. \end{aligned}$$

Pero esto dice que $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ no tiene subsucesión convergente, contradiciendo la compacidad de T. □

Teorema 3.2.6. ***(alternativa de Fredholm)*** *Sea X un ELN y $T \in \mathcal{L}^*(X)$ compacto. Para toda $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ solo una de las siguientes se cumple:*
i) Para todo $y \in X$, existe un único $x \in X$ tal que $Tx - \lambda x = y$.
ii)Existe $x \in X - \{0\}$ tal que $Tx - \lambda x = 0$.

Demostración. Del teorema anterior, pues solo se cumple una: $T - \lambda I$ es o no inyectiva. □

Ejemplo 3.2.7. Consideremos la ecuación integral

$$x(t) - \lambda \int_0^1 e^{t-s} x(s) ds = u(t), \; t \in [0,1]. \tag{3.1}$$

Entonces, de acuerdo a la alternativa de Fredholm, hay una única función continua que resuelva la ecuación, o hay al menos una función no nula que resuelve la ecuación cuando u es cero. Entonces, podemos encontrar los valores λ's, para ver en que caso estamos. ¿Cuál será ese conjunto de λ's?

3.3 Descomposición espectral

Queremos encontrar los eigenvalores de T, i.e. resolver $Tx - \lambda x = 0$.

Definición 3.3.1. Sea X un ELN y $T \in \mathcal{L}^{\#}(X)$. Se dice que $\lambda \in \mathbb{K}$ es **eigenvalor** de T si $V := N(T - \lambda I) \neq \{0\}$, y a V se le llaman los **eigenvectores** correspondientes a λ. Decimos que la **multiplicidad** de λ es n si $n = dim N(T - \lambda I)$.

El lo sucesivo X es espacio no vacio con producto interno, y usamos $\{x\}^{\perp}$ para denotar todos los elementos de X ortogonales a $x \in X$.

Lema 3.3.2. *Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ simétrico. Entonces*
(i) Todos los eigenvalores de T son reales.
(ii) Eigenvectores de T de diferentes eigenvalores son ortogonales.
(iii) $\langle T(x), x\rangle$ es real para todo $x \in X$.
(iv) Se tiene que $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle T(x), x\rangle|$.

Demostración. Dejamos al lector la demostración de los primeros tres incisos. Para el inciso iv), sea $M := \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|$. Como $\|T\| = \sup_{\|z\|=1} \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, z\rangle|$, está claro que $\|T\| \geq M$. Mostremos pues la otra desigualdad.

Se puede verificar que

$$\langle T(x+z), x+z\rangle - \langle T(x-z), x-z\rangle = 4Re\langle Tx, z\rangle.$$

Usando la ley del paralelogramo tenemos entonces

$$4Re\langle Tx, z\rangle \leq M\|x+z\|^2 + M\|x-z\|^2 = 2M(\|x\|^2 + \|z\|^2),$$

lo cual es válido también para $z = x$.

Ahora bien, si $z := Tx/\|Tx\|$, entonces

$$Re\langle Tx, z\rangle = Re\left\langle Tx, \frac{Tx}{\|Tx\|}\right\rangle = \|Tx\|,$$

pero también si $\|x\| = \|z\| = 1$,

$$Re\langle Tx, z\rangle \leq \frac{M}{2}(\|x\|^2 + \|z\|^2) = M.$$

Con esto concluimos que $\|T\| \leq M$. Queda pues mostrado que $\|T\| = M$. □

Teorema 3.3.3. *Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ compacto y simétrico. Entonces al menos uno de los valores $\{\|T\|, -\|T\|\}$ es un eigenvalor de T.*

Demostración. Supongamos que $T \neq 0$; de otro modo es trivial. Del lema anterior sabemos que $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle T(x), x\rangle|$, y que $\langle Tx, x\rangle$ es real para todo $x \in X$. Tomando que en cuenta que T es compacto, tenemos que existe $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ de norma uno tal que
i) $\lambda := \lim_{k\to\infty}\langle Tx_k, x_k\rangle$ es igual a $\|T\|$ o $-\|T\|$, y
ii) $\lim_{k\to\infty} T(x_k) = y$ para algún $y \in X$.

Así, cuando $k \to \infty$,

$$\begin{array}{rcl} 0 & \leq & \|Tx_k - \lambda x_k\|^2 = \langle Tx_k - \lambda x_k, Tx_k - \lambda x_k\rangle \\ & = & \langle Tx_k, Tx_k\rangle - 2\lambda\langle Tx_k, x_k\rangle + \lambda^2 \\ & \to & \|y\|^2 - 2\lambda^2 + \lambda^2 = \|y\|^2 - \lambda^2. \end{array}$$

Por otro lado,

$$\|y\| = \lim_{k\to\infty} \|Tx_k\| \leq \|T\| = |\lambda|.$$

Entonces $\lim_{k\to\infty} \|Tx_k - \lambda x_k\| = 0$, luego

$$\|y - \lambda x_k\| \leq \|y - Tx_k\| + \|Tx_k - \lambda x_k\| \to 0,$$

cuando $k \to \infty$. O sea que $\lim_{k\to\infty} \lambda x_k = y$, por lo tanto

$$T(y) = \lim_{k\to\infty} T(\lambda x_k) = \lim_{k\to\infty} = \lambda y.$$

Como $y \neq 0$, podemos concluir que al menos uno de $\{\|T\|, -\|T\|\}$ es eigenvalor. $\square$

Ahora veremos que para un operador compacto y simétrico, hay una base de su imagen formada de eigenvectores.

Teorema 3.3.4. *(**Teorema espectral**) Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ compacto y simétrico. Entonces, existen un conjunto $\{\lambda_k\} \subseteq \mathbb{R}$ a lo más numerable de eigenvalores de T repetidos de acuerdo a multiplicidades y tal que*

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k$$

para todo $x \in X$, donde e_k son las correspondientes eigenfuciones, tomadas de norma uno. Además, si la colección de eigenvalores es infinito entonces $\lambda_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Demostración. Suponemos que $T \neq 0$, de lo contrario es trivial. Sea $X_1 = X$. Del teorema anterior tomemos $\lambda_1 = \pm\|T\|$ y un eigenvector $e_1 \in X_1$ para λ_1, $\|e_1\| = 1$. Ahora sea $X_2 = \{e_1\}^{\perp} \subseteq X_1$. Para $x \in X_2$, se tiene $\langle T(x), e_1 \rangle = \langle x, T(e_1) \rangle = \langle x, \lambda_1 e_1 \rangle = 0$. Entonces $T(X_2) \subseteq X_2$.

Consideremos la restricción $T|_{X_2} \colon X_2 \to X_2$. Este operador es compacto y simétrico, X_2 es un espacio lineal con producto interno, y $\| T|_{X_2} \| \leq \|T\|$. Si $T|_{X_2} \neq 0$, otra vez usando el teorema anterior, hay $e_2 \in X_2$ y λ_2 tales que

$$T(e_2) = \lambda_2 e_2,\ \|e_2\| = 1,\ |\lambda_2| = \| T|_{X_2} \| \leq |\lambda_1| \text{ y } e_2 \perp e_1.$$

Continuando con este proceso, formamos $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n| \geq 0$ y $\{e_1, \ldots e_n\}$ ortonormal con $T(e_k) = \lambda_k e_k$ para $k = 1, \ldots, n$. Se define $X_{n+1} = \{e_1, \ldots e_n\}^{\perp}$.

Puede suceder que $T|_{X_{n+1}} = 0$. En este caso, el rango de T es $R(T) = \langle \{e_1, \ldots, e_n\} \rangle$. En efecto, sea $x \in X$. Entonces

$$x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \perp \{e_1, \ldots, e_n\},$$

por lo que $x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \in X_{n+1}$, y se tendría pues que $T(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle T(e_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k$.

Puede suceder que el proceso siga sin parar. Si $\lambda_k \not\to 0$, entonces hay una subsucesión para la cual $|\lambda_{k_j}| \geq \epsilon > 0$. Luego $\{e_{k_j}/\lambda_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ es acotada. Pero $(\forall j)\ T(e_{k_j}/\lambda_{k_j}) = e_{k_j}$, contradiciendo que T es compacto, pues como $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ es ortonormal se tendría que $\|e_{k_i} - e_{k_j}\| = \sqrt{2}$ cuando $i \neq j$. Por lo tanto $\lambda_k \to 0$ cuando $k \to \infty$.

Sea $x \in X$. Definamos $y_n = x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$. Como $\langle y_n, e_k \rangle = 0,\ k = 1, \ldots, n$, se tiene $y_n \in X_{n+1}$ y

$$\|x\|^2 = \|y_n + \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k\|^2 = \|y_n\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \geq \|y_n\|^2.$$

Por esto y por el hecho que $\lambda_{n+1} = \pm\| T|_{X_{n+1}} \|$,

$$\|T(y_n)\| = \|T|_{X_{n+1}}(y_n)\| \le |\lambda_{n+1}|\|x\| \to 0,\ n \to \infty.$$

Finalmente, como $T(y_n) = T(x) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, e_k\rangle e_k$ se concluye que $T(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, e_k\rangle e_k$. □

Ejemplo 3.3.5. Consideremos el espacio de funciones $L_2[0,1]$ real valuadas y $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base ortonormal de este. Podemos intentar verificar que el siguiente operador es compacto y simétrico,

$$[Tf](t) := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n(t) \int_0^1 f(s) e_n(s) ds,\ t \in [0,1], \tag{3.2}$$

para todo $f \in L_2[0,1]$, y donde $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$.

Si así resulta, se puede ver que el conjunto $\{(e_n, \alpha_n)\}_{n=1}^{\infty}$ corresponden a los eigenvectores y eigenvalores de T. ¿Qué condiciones necesitamos pedir al conjunto de α's para que esto sea así?

3.4 Ejercicios

3.4.1. Sea X un ELN (con campo $\mathbb{R}$) y $T \in \mathcal{L}(X)$ operador de rango finito. Así, hay $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset X$ linealmente independientes tales que $R(T) = \langle\{e_1, \ldots, e_n\}\rangle$. Para algún $y \in X$ fijo sean $\{\beta_i, i = 1, \ldots, n\}$ y $\{\alpha_{ik}; i = 1, \ldots, n\ ; k = 1, \ldots, n\}$ en $\mathbb{R}$ tales que

$$T(y) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i \text{ y } T(e_k) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} e_i, k = 1, \ldots, n.$$

i) Suponga que se tiene $T(x) - \lambda x = y$ para $\lambda \neq 0$ y $x \in X$ único. Demostrar entonces que se cumple

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki}\gamma_i - \lambda\gamma_k = \beta_k,\ \text{para } k = 1, \ldots, n,$$

donde $T(x) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i e_i$. Concluya que $x = \frac{1}{\lambda}\left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i e_i - y\right)$. Sugerencia: calcule $T(T(x) - \lambda x) = T(y)$.

ii) ¿Es compacto en algún espacio de funciones el siguiente operador?,

$$T(f)(t) = \int_0^1 K(s,t) f(s) ds,\ t \in [0,1]$$

donde $K(s,t) = \sum_{i=1}^{n} h_i(s) e_i(t)$, con h_i's y e_i's funciones.

iii) Si g es conocida y $\lambda \neq 0$, ¿Cómo encontraría f que satisfaga la ecuación integral

$$\int_0^1 (t-s) f(s) ds - \lambda f(t) = g(t),\ t \in [0,1]?$$

Dé una fórmula.

3.4.2. Sea $K(s,t)$ una función en $L_2([0,1]\times[0,1])$, y considere el operador en $L_2([0,1])$ dado por

$$T(x)(t) := \int_0^t K(s,t)x(s)ds.$$

En el contexto del Teorema 3.8, ¿Cuál podría ser explícitamente la sucesión de operadores de rango finito para mostrar que T es compacto?, ¿Podríamos usar funciones indicadoras?.

3.4.3. Resuelva

$$g(s) = f(s) + \lambda \int_0^{2\pi} \sin(s)\cos(t)g(t)dt$$

para g.

3.4.4. Dé una fórmula para encontrar x de la expresión

$$\int_0^1 (a(s)+b(t))x(s)ds - x(t) = c(t).$$

3.4.5. Un núcleo o kernel **separable** es de la forma $K(s,t) = \sum_{i=1}^n h_i(s)e_i(t)$, con h_i's y e_i's funciones y $n < \infty$. Demuestre que cualquier kernel $K(s,t) \in L_2([0,1]\times[0,1])$ es el límite de una sucesión de núcleos separables.

3.4.6. Sea X un espacio de Hilbert con campo $\mathbb{R}$ y base ortonormal $\{e_k\}_{k=1}^\infty$. Sea $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ una sucesión, ¿Necesitamos condiciones adicionales sobre los λ_k's para mostrar que

$$T(x) := \sum_{k=1}^\infty \lambda_k \langle x, e_k\rangle e_k$$

es compacto?, ¿Es T autoadjunto?.

3.4.7. Sea $T : X \to X$ un operador compacto en un ELN X. Demostrar lo siguiente:
i) Si $x - Tx = 0$ solo para $x = 0$, entonces $(\forall y \in X)$(hay único $x \in X$)$x - Tx = y$.
ii) La ecuación $x - Tx = 0$ tiene un número finito de soluciones linealmente independientes, y además, si $x - Tx = y$ tiene soluciones no nulas, entonces estas son de la forma $x = z + w$ con $z \in N(I - T)$ y $w \in X$.

3.4.8. Sea $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ diferenciable y tal que $f(a) = 0$. Considere la **ecuación lineal de Volterra del primer tipo** dada por

$$\int_a^t k(t,s)x(s)ds = u(t),\ t \in [a,b].$$

Derive con respecto a t, y diga que condiciones se necesitan para transfomar esta ecuación en una **del segundo tipo**, i.e. de la forma

$$x(t) + \int_a^t \overline{k}(s,t)x(s)ds = v(t),\ t \in [a,b].$$

Usando la alternativa de Fredholm, ¿qué conclusiones puede decir de la primera a partir de la segunda?

3.4.9. Diga si un operador lineal de Volterra en $C[0,1]$ con kernel continuo tiene eigenvalores diferentes de cero.

3.4.10. Sea X un espacio con producto interno con base ortonormal $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Para $n < \infty$ fija defina $V := \langle\{e_1, \ldots, e_n\}\rangle \subset X$ y el mapeo $T : X \to V$ como $x \mapsto v$ tal que $dist(x, V) = \|x - v\|$. Encuentre los eigenvalores y eigenvectores de T.

3.4.11. Considere la ecuación $x(t) - \int_a^b e^{t-s}x(s)ds = y(t),\ t \in [a,b]$ con $y \in L_2[a,b]$. ¿Bajo qué condiciones sobre a, b y y dicha ecuación cumple el primer inciso de la alternativa de Fredholm, y bajo cuáles se está en el segundo inciso?

3.4.12. Con las condiciones del Teorema espectral, demuestre que si adicionalmente $N(T) = \{0\}$, entonces el conjunto de eigenvectores $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base ortonormal.

3.4.13. Sea X un espacio con producto interno. Suponga que un operador T en X es de la forma $T(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, e_k\rangle e_k$ con $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ortonormal y $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{K} - \{0\}$ acotada. Si y está en el rango de T, ¿cómo propondría resolver $T(x) = y$?.

3.4.14. Sean $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Defina

$$G(s,t) := \begin{cases} f(s)g(t) & 0 \le s \le t \le 1 \\ g(s)f(t) & 0 \le t \le s \le 1. \end{cases}$$

¿Es el operador $T(x)(t) := \int_0^1 G(s,t)x(s)ds$ compacto o simétrico en $L_2([0,1])$?

3.4.15. Sea X un espacio con producto interno y $T \in \mathcal{L}^*(X,X)$ simétrico. Demuestre que si T es invertible, T^{-1} es también simétrico.

3.4.16. Muestre que el siguiente operador es compacto en $L_2[0,\pi]$,

$$f \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\cos(kt)}{k} f(s)\cos(ks)ds.$$

Encuentre los eigenvalores e indique en que parte de la alternativa de Fredholm nos encuentramos dependiendo del valor λ (parámetro de la alternativa).

3.4.17. Exhiba un operador T compacto y simétrico tal que $\|T\|$ y $-\|T\|$ sean ambos eigenvalores y que además tenga una cantidad infinita de eigenvalores.

3.4.18. Muestre que el operador integral de Fredholm en $L_2[-\pi,\pi]$ con kernel

$$K(t,s) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \left(\frac{\cos((k+1)t)}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin(ks)}{\sqrt{\pi}} - \frac{\sin((k+1)t)}{\sqrt{\pi}} \frac{\cos(ks)}{\sqrt{\pi}} \right)$$

no tiene eigenvalores.

3.4.19. Sea $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ una base ortonormal de un espacio de Hilbert X separable. Se dice que $T : X \to X$ es un **operador de Hilbert-Schmidt** si $\sum_{k=1}^{\infty} \|Te_k\|^2 < \infty$. Muestre que T es compacto.
Sugerencia: Defina $T_n x := \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k\rangle Te_k$ y analice que pasa cuando $n \to \infty$.

Capítulo 4

Teoría de Sturm-Liouville

4.1 Planteamiento y propiedades

Una ecuación diferencial de segundo orden está dada por la expresión

$$F(t, x, x', x'') = 0 \text{ con } F : [a, b] \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}.$$

En esta sección nos enfocamos a ecuaciones lineales de la forma

$$p(t)x''(t) + r(t)x'(t) + q(t)x(t) = y(t), \tag{4.1}$$

donde p, r, q y y son funciones conocidas, y $p \neq 0$ en todo $[a, b]$. Buscamos pues $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ que sea solución de la ecuación. Para llevar a cabo esto, se piden también condiciones de frontera, por ejemplo en términos de $x(a), x'(a), x(b), x'(b)$.

Primero, definimos el operador

$$(Lx)(t) := p(t)x''(t) + r(t)x'(t) + q(t)x(t)$$

sobre $L_2[a, b]$ actuando en el subconjunto de funciones dos veces diferenciables $C^2[a, b]$. El siguiente cálculo ayuda a estudiar el operador adjunto de L:

$$\begin{aligned}
\langle Lf, g\rangle &= \int_a^b (pf'' + rf' + qf)g \\
&= pf'g|_a^b - \int_a^b f'(pg)' + rfg|_a^b - \int_a^b f(rg)' + \int_a^b qfg \\
&= [pf'g - f(pg)']_a^b + \int_a^b f(pg)'' + rfg|_a^b - \int_a^b f(rg)' + \int_a^b qfg \\
&= \langle f, L^*g\rangle + [p(f'g - fg') + (r - p')fg]_a^b,
\end{aligned}$$

donde $L^*g := (pg)'' - (rg)' + qg = pg'' + (2p' - r)g' + (p'' - r' + q)g$, al cual se le llama el **adjunto formal** de L.

Nota 4.1.1. Vemos que si $r = p'$ y si $p(f'g - fg')|_a^b = 0$, entonces L sería un operador simétrico dado por

$$Lx = (px')' + qx.$$

Los siguientes resultados ayudan a transformar el problema original (4.1) en uno que involucra un operador simétrico.

Proposición 4.1.2. *La EDO $A(t)x'' + B(t)x' + C(t)x(t) = D(t)$ con $t \in [a,b]$ admite la representación $(p(t)x'(t))' + q(t)x(t) = f(t)$ cuando A, B, C son continuas y la función A nunca se anula en $[a,b]$.*

Demostración. En la primera ecuación multiplicamos ambos lados por

$$\frac{1}{A(t)} e^{\int_a^t \frac{B(s)}{A(s)} ds}$$

para obtener

$$x'' e^{\int \frac{B}{A}} + \frac{B}{A} x' e^{\int \frac{B}{A}} + \frac{C}{A} x e^{\int \frac{B}{A}} = \frac{D}{A} e^{\int \frac{B}{A}},$$

lo cual se escribe también como

$$\left(x' e^{\int \frac{B}{A}}\right)' + \left(\frac{C}{A} e^{\int \frac{B}{A}}\right) x = \frac{D}{A} e^{\int \frac{B}{A}}.$$

□

Por otro lado, es común asumir que se conocen condiciones de frontera dadas por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_1 x(a) + \alpha_2 x'(a) = 0 \\ \beta_1 x(b) + \beta_2 x'(b) = 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

con $|\alpha_1| + |\alpha_2| > 0$ y $|\beta_1| + |\beta_2| > 0$.

Proposición 4.1.3. *Si f y g satisfacen las condiciones (4.2), entonces*

$$p(fg' - f'g)|_a^b = 0.$$

Demostración. Las condiciones (4.2) dicen que

$$\begin{pmatrix} f(b) & f'(b) \\ g(b) & g'(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0,$$

con $|\beta_1| + |\beta_2| > 0$, luego la matriz es singular y el determinante es $f(b)g'(b) - f'(b)g(b) = 0$, y lo mismo con a. □

En vista de las dos proposiones anteriores y la Nota 4.1.1 podemos concentrarnos en estudiar el siguiente problema que involucra un operador simétrico.

Definición 4.1.4. Sean p, q y r funciones en $C[a,b]$ real valuadas, p es diferenciable y además pedimos que $p, r > 0$.
i)El **problema de Sturm-Liouville** (SL1) es encontrar x que satisface

$$(p(t)x'(t))' + q(t)x(t) = y(t)$$

y tal que x cumple las condiciones de frontera (4.2).
ii)El **problema de Sturm-Liouville de eigenvalores** (SL2) es encontrar $\lambda \in \mathbb{C}$ y x tal que

$$(p(t)x'(t))' + q(t)x(t) + \lambda r(t)x(t) = 0,$$

y además x cumple las condiciones de frontera (4.2). Cuando esto se cumple, a λ se le llama **eigenvalor** y a x **eigenfunción** o **eigenvector**.

La función r proviene de estudiar ecuaciones diferenciales parciales, como se verá en la sección 4.4.

Estamos pues considerando el operador $L : X \to L_2[a,b]$, definido como

$$Lx := (px')' + qx, \tag{4.3}$$

donde

$$X := \{x \in L_2[a,b] : x'' \text{ existe y } x \text{ cumple (4.2)}\}.$$

Se puede verificar que X es un subespacio lineal.

Ahora mostraremos la **identidad de Lagrange**.

Lema 4.1.5. *Para u y v en $C^2[a,b]$ se cumple la identidad de Lagrange:*

$$v(t)(Lu)(t) - u(t)(Lv)(t) = \frac{d}{dt}[p(t)(v(t)u'(t) - u(t)v'(t))], \tag{4.4}$$

para toda $t \in [a,b]$.

Demostración. Para $u, v \in C^2[a,b]$ tenemos

$$\begin{aligned} vLu - uLv &= v((pu')' + qu) - u((pv')' + qv) \\ &= v(pu'' + p'u' + qu) - u(pv'' + p'v' + qv) = \\ &= p(vu'' - uv'') + p'(vu' - uv') + q(uv - uv) = (p(vu' - uv'))'. \end{aligned}$$

$\square$

Veamos que situaciones se pueden tener relaciondo al problema SL2 y las diferentes propiedades que se tienen.

Ejemplo 4.1.6. i) Consideremos el problema SL2 dado por la ecuación $x''(t) + \lambda x(t) = 0,\ t \in [0,1]$, y condiciones $x(0) = x(1) = 0$. Así, las soluciones posibles son:
1) Si $\lambda < 0$, entonces $x(t) = \alpha e^{\sqrt{-\lambda}t} + \beta e^{-\sqrt{-\lambda}t}$.
2) Si $\lambda = 0$, entonces $x(t) = \alpha + \beta t$.
3) Si $\lambda > 0$, entonces $x(t) = \alpha \cos(\sqrt{\lambda}t) + \beta \sin(\sqrt{\lambda}t)$.

Aqui α, β son constantes en $\mathbb{R}$. Podemos ver en el caso 1) que si α o β no son cero, entonces no se cumplen las condiciones de frontera, por lo que no hay eigenvalores negativos de este problema. Similarmente en el caso 2). En el caso 3) la condición $x(0) = 0$ implica $\alpha = 0$, pero $x(1) = 0$ implica $\sin(\sqrt{\lambda}) = 0$, lo cual se cumple siempre que $\lambda = (n\pi)^2,\ n = 1, 2 \ldots$.

ii) El problema $x''(t) + \lambda x(t) = 0,\ t \in \mathbb{R}$ con condiciones $\lim_{t\to-\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ no tiene eigenvalores.

iii) En el problema $x''(t) + \lambda x(t) = 0,\ t \in \mathbb{R}$ con condición $\sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)| < \infty$ cualquier valor $\lambda > 0$ puede ser eigenvalor con eigenfunción $\sin(\sqrt{\lambda}t)$ o $\cos(\sqrt{\lambda}t)$.

Proposición 4.1.7. *Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ fijo y u y v soluciones de $Lx + \lambda rx = 0$ linealmente independientes, entonces λ es eigenvalor si y solo si el determinante*

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) & \alpha_1 v(a) + \alpha_2 v'(a) \\ \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) & \beta_1 v(b) + \beta_2 v'(b) \end{vmatrix} = 0. \tag{4.5}$$

Demostración. Por la Corolario 1.4.4, cualquier solución de $Lx + \lambda rx = 0$ es combinación lineal de u y v. Así, λ es eigenvalor si y solo si hay $c, d \in \mathbb{R}$ con $|c| + |d| > 0$ tal que $w = cu + dv$ es eigenfunción, para lo cual basta saber que w cumple con

$$\begin{aligned} \alpha_1 w(a) + \alpha_2 w'(a) = 0 \\ \beta_1 w(b) + \beta_2 w'(b) = 0. \end{aligned}$$

Esto es

$$c \begin{pmatrix} \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) \\ \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b). \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} \alpha_1 v(a) + \alpha_2 v'(a) \\ \beta_1 v(b) + \beta_2 v'(b). \end{pmatrix} = 0.$$

Pero por las condiciones sobre c y d esto ocurre si los vectores son linealmente dependientes, i.e. si se tiene (4.5). $\square$

Ejemplo 4.1.8. Para $\lambda > 0$ el problema

$$x'' + \lambda x = 0,\ t \in [0, 1],\ x(0) = x'(1) = 0,$$

tiene soluciones linealmente independientes dadas por $u(x) := \sin(\sqrt{\lambda}x)$ y $v(x) := \cos(\sqrt{\lambda}x)$. Por la Proposición 4.1.7, λ es eigenvalor si y solo si

$$\begin{vmatrix} \sin(0) & \cos(0) \\ \sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}) & -\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}) \end{vmatrix} = 0.$$

Por lo que $\lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2$, $n = 1, 2, \ldots$ son eigenvalores.

Proposición 4.1.9. *Eigenfunciones de distintos eigenvalores son ortogonales c.r.al producto interno*

$$\langle u, v\rangle_r := \int_a^b u(t)v(t)r(t)dt.$$

Demostración. Sean e_n y e_m eigenfunciones de eigenvalores $\lambda_n \neq \lambda_m$. Entonces

$$Le_n = (pe_n')' + qe_n = -\lambda_n r e_n$$
$$Le_m = (pe_m')' + qe_m = -\lambda_m r e_m.$$

Multiplicando respectivamente por e_m y e_n, restando e integrando llegamos a

$$\int_a^b (e_m Le_n - e_n Le_m) = (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b e_m e_n r.$$

Usando la indentidad de Lagrange, Lema 4.1.5, y la Proposición 4.1.3 vemos que lo anterior es cero. □

Proposición 4.1.10. *Los eigenvalores del problema SL2 son números reales.*

Demostración. Supongamos que λ es un eigenvalor con $\lambda \neq \overline{\lambda}$ y v una eigenfunción correspondiente. Se puede mostrar que $\overline{\lambda}$ y $\overline{v}$ serían también eigenvalor y eigenfunción. Pero por la Proposición 4.1.9

$$0 = \langle v, \overline{v} \rangle_r = \int v\overline{v}r = \int |v|^2 r,$$

lo cual solo ocurre si $v = 0$. □

Proposición 4.1.11. *Los eigenvalores son simples, i.e. solo hay una eigenfunción por eigenvalor.*

Demostración. Supongamos que u y v son dos eigenfunciones de un mismo eigenvalor. De la Proposición 4.1.3 tendríamos que el Wronskiano es cero en al menos un punto, pero el Teorema 1.4.6 afirmaría que u y v son lineamente dependientes. □

Nota 4.1.12. En vista de la Proposición 4.1.10, en los sucesivo restringimos el problema SL2 al caso $\lambda \in \mathbb{R}$.

4.2 Método de Prüfer

En esta sección tomamos cierto punto de vista para poder estudiar los eigenvalores, del operador L definido en (4.3). Esto consiste en asumir que el producto px' toma la forma

$$p(t)x'(t) = k(t),$$

y definiendo

$$g(t) := q(t) + \lambda r(t),$$

tenemos que

$$x'(t) = \frac{1}{p(t)}k(t) \text{ y } k'(t) = -g(t)x(t).$$

Ahora tomamos la siguiente representación en coordenadas polares:

$$x(t) = R(t)\sin(\theta(t)) \text{ y } k(t) = R(t)\cos(\theta(t)).$$

Derivando tenemos

$$\begin{aligned} R\cos(\theta)\theta' + R'\sin(\theta) = x' = \tfrac{k}{p} = \tfrac{R}{p}\cos(\theta) \\ R'\cos(\theta) - R\sin(\theta)\theta' = k' = -gx = -gR\sin(\theta). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Multiplicamos las ecuaciones en (4.6) por $\sin(\theta)$ y $\cos(\theta)$, respectivamente, y posteriormente las sumamos para llegar a

$$R' = \frac{R}{2}\left(\frac{1}{p} - g\right)\sin(2\theta). \tag{4.7}$$

Ahora multiplicamos las ecuaciones en (4.6) por $\cos(\theta)$ y $\sin(\theta)$, respectivamente, y posteriormente las restamos para llegar a

$$\theta' = \frac{1}{p}\cos^2(\theta) + g\sin^2(\theta). \tag{4.8}$$

Dada una condición inicial $\theta(a)$, la ecuación (4.8) tiene solución única, la denotamos

$$\theta(\lambda, t),\ \ t \in [a, b], \tag{4.9}$$

pues depende del valor $\lambda \in \mathbb{R}$. Con esto, usando la notación $F_\lambda(t) := \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p(t)} - g(t)\right)$, resolvemos (4.7) para llegar a

$$R_\lambda(t) := R_\lambda(a)\exp\left\{\int_a^t F_\lambda(s)\sin(2\theta(\lambda, s))ds\right\}, \tag{4.10}$$

también escribimos R_λ para enfatizar la dependencia en λ.

Nota 4.2.1. Vemos que los ceros de x son los ceros de $\sin(\theta)$, es decir cuando $\theta(t)/\pi \in \mathbb{Z}$.

El siguiente lema es un resultado de comparación que será de utilidad para analizar los ceros descritos en la Nota 4.2.1.

Lema 4.2.2. *Considere las ecuaciones diferenciales*

$$(px')' + gx = 0 \ \text{ y } \ (p_m x')' + g_m x = 0, \tag{4.11}$$

y sean θ y θ_m respectivamente las funciones descrita en (4.9) para cada ecuación en (4.11). Si $(\forall t \in [a, b])p_m(t) \geq p(t)$ y $g_m(t) \leq g(t)$, y además la condiciones iniciales cumple que $\theta_m(a) \leq \theta(a)$, entonces

$$\theta_m(t) \leq \theta(t),\ \ t \in [a, b]. \tag{4.12}$$

Más aún, si se tiene desigualdad estricta $g_m(t) < g(t)$, entonces $\theta_m(t) < \theta(t),\ t \in [a, b]$.

Demostración. Del método de Prüfer, especificamente de la ecuación (4.8) tenemos

$$\begin{aligned}\theta' &= \tfrac{1}{p}\cos^2(\theta) + g\sin^2(\theta)\\ \theta_m' &= \tfrac{1}{p_m}\cos^2(\theta_m) + g_m\sin^2(\theta_m).\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}(\theta-\theta_m)' &= \left(g_m - \frac{1}{p_m}\right)\frac{\sin^2(\theta)-\sin^2(\theta_m)}{\theta-\theta_m}(\theta-\theta_m)\\ &+ \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_m}\right)\cos^2(\theta) + (g-g_m)\sin^2(\theta).\end{aligned}$$

Definiendo $u := \theta - \theta_m$, podemos ver la ecuación anterior en la forma

$$u'(t) = G(t)u(t) + H(t) \tag{4.13}$$

Además se cumple que $H \geq 0$ y que G es función continua, esto último se observa usando el teorema del valor medio que afirma

$$\frac{\sin^2(\theta(t)) - \sin^2(\theta_m(t))}{\theta(t)-\theta_m(t)} = \sin(2\xi(t))$$

para alguna función $\xi(t)$ entre $\theta(t)$ y $\theta_m(t)$ para cada $t \in [a,b]$.

Finalmente, como la solución de la ecuación diferencial (4.13) está dada por

$$u(t) = e^{\int_a^t G(s)ds}\left(\int_a^t H(s)e^{-\int_a^s G(v)dv}ds + u(a)\right),\ t \in [a,b],$$

entonces podemos afirmar que θ domina a θ_m. La desigualdad estricta se obtiene observado que de acuerdo a la hípotesis. □

Podemos mostrar ahora el siguiente resultado fundamental, que entre otras cosas afirma que el operador L del problema de Sturm-Liouville tiene espectro discreto.

Teorema 4.2.3. *El operador L tiene una cantidad numerable de eigenvalores, los cuales están acotados inferiormente y son estrictamente creciente a infinito: $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \to \infty$.*

Demostración. En el método de Prüfer $\lambda \in \mathbb{R}$ es eigenvalor si

$$0 = \alpha_1 x(a) + \alpha_2 x'(a) = R_\lambda(a)\left(\alpha_1 \sin(\theta(\lambda,a)) + \alpha_2\frac{\cos(\theta(\lambda,a))}{p(a)}\right). \tag{4.14}$$

Sin pérdida de generalidad basta pedir

$$\theta(\lambda,a) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } \alpha_1 = 0\\ \rho \in [0,\pi/2)\cup(\pi/2,\pi] & \text{si } \alpha_1 \neq 0,\ \text{con } \rho \text{ tal que } \tan(\rho) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1 p(a)}.\end{cases}$$

Así, para cada valor $\lambda \in \mathbb{R}$, dado el valor $\theta(\lambda,a)$, queda determinada la función $\{\theta(\lambda,t), t\in[a,b]\}$ solución de (4.8). Sin embargo, para que un valor $\lambda \in \mathbb{R}$ sea eigenvalor se debe cumplir también la condición de frontera en b, para lo cual requerimos también que

$$0 = \beta_1 x(b) + \beta_2 x'(b) = R_\lambda(b)\left(\beta_1 \sin(\theta(\lambda, b)) + \beta_2 \frac{\cos(\theta(\lambda, b))}{p(b)}\right). \tag{4.15}$$

Para lo cual bastaría que exitiera algún entero n tal que

$$\theta(\lambda, b) = \begin{cases} \rho + n\pi & \text{si } \beta_1 = 0, \text{ con } \rho = \pi/2 \\ \rho + n\pi & \text{si } \beta_1 \neq 0, \text{ con } \rho \text{ tal que } \tan(\rho) = -\frac{\beta_2}{\beta_1 p(b)}. \end{cases}$$

Busquemos pues valores $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales se cumpla esta condición en b.

Por el Lema 4.2.2 vemos en particular que $\theta(\lambda, b)$ es monótona creciente en λ, y además se puede ver que es continua en λ. Probemos ahora que $\theta(\lambda, b) \to \infty$ cuando $\lambda \to \infty$, lo cual muestra que hay una cantidad infinita pero numerable de eigenvalores determinados, pues al crecer λ, la función $\theta(\lambda, b)$ estaría cruzando valores de la forma $\rho + n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$.

Sean $p_m,\ q_m$ y r_m constantes tales que

$$(\forall t \in [a, b]) p_m \geq p(t),\ q_m \leq q(t),\ r_m \leq r(t),$$

y sean θ y θ_m determinadas como (4.9), con $\theta_m(\lambda, a) := \theta(\lambda, a)$. Del Lema 4.2.2 sabemos que

$$(\forall t \in [a, b])\ \theta(\lambda, t) \geq \theta_m(\lambda, t). \tag{4.16}$$

Tenemos también que

$$\theta'_m(\lambda, t) = \frac{\cos^2 \theta_m(\lambda, t)}{p_m} + (\lambda r_m + q_m) \sin^2(\theta_m(\lambda, t)),$$

por lo que para λ suficientemente grande $\theta'_m(\lambda, t) \geq 0$ para toda $t \in [a, b]$, lo cual diría que $\theta_m(\lambda, t)$ es creciente en t.

Por otro lado, sea x_m solución de

$$(p_m x')' + (q_m + \lambda r_m)x = 0. \tag{4.17}$$

Luego, los ceros de x_m determinan los ceros de $\sin(\theta_m(\lambda, t))$, que detemina también los valores donde $\theta_m(\lambda, t)$ es de la forma $n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$. Sin embargo, cuando λ es un valor grande tal que $\mu := (q_m + \lambda r_m)/p_m > 0$, la solución de (4.17) es de la forma $x_m(t) = \gamma \cos(\mu t) + \delta \sin(\mu t)$. Esto nos dice que los ceros de x_m aumentan conforme λ crece, lo cual surge porque la periodicidad aumenta. Como θ_m es creciente en t, concluimos que $\theta_m(\lambda, b) \to \infty$ cuando $\lambda \to \infty$, y lo mismo para θ debido a (4.16).

Ahora veamos que $\lim_{\lambda \to -\infty} |\theta(\lambda, b)| < \infty$ lo cual diría que los eigenvalores están acotados inferiormente. Para esto, tomemos ahora $p_m,\ q_m$ y r_m constantes tales que

$$(\forall t \in [a, b]) p_m \geq p(t),\ q_m \leq q(t),\ r_m \geq r(t).$$

Del Lema 4.2.2, cuando $\lambda < 0$, se tiene $\theta_m \leq \theta$. Pero la solución de (4.17) cuando λ es suficientemente pequeño es de la forma $x_m(t) = \gamma e^{\mu t} + \delta e^{-\mu t}$, la cual no tiene ceros, esto implica que $\theta_m(\lambda, b)$ está acotada inferiormente cuando $\lambda \to -\infty$, luego se tiene la conclusión para θ.

$\square$

4.3 Operador de Green

Las sección anterior nos ayuda a atacar el problema SL1. Primero tenemos lo siguiente.

Teorema 4.3.1. *Sea X un espacio de Hilbert y $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ ortonormal. Sea $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{K} - \{0\}$ tal que el operador $Tx := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n$ para $x \in X$ está bien definido. Si $y \in R(T)$ entonces*

$$x := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle y, e_n\rangle}{\lambda_n} e_n$$

pertenece a X y es solución de $Tx = y$.

Demostración. Sea $z \in X$. Al tomar el producto interno en la ecuación $Tz = y$ c.r.a e_m y usando la continuidad del producto interno obtenemos

$$\langle \sum \lambda_n \langle z, e_n\rangle e_n, e_m\rangle = \langle y, e_m\rangle,$$

luego $\lambda_m\langle z, e_m\rangle = \langle y, e_m\rangle$. Por la desigualdad de Bessel

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} \frac{\langle y, e_n\rangle}{\lambda_n} e_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |\langle z, e_n\rangle|^2 \leq \|z\|^2,$$

por lo tanto la suma que define x es convergente, y por la completez del espacio concluimos que $x \in X$. Así

$$T\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle y, e_n\rangle}{\lambda_n} e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle y, e_n\rangle}{\lambda_n} T(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, e_n\rangle e_n = y$$

□

Para estudiar el problema SL1 atravez del planteamiento SL2, tomemos la función $r := 1$ Por el Teorema 4.2.3 el operador de Sturm-Liouville L posée una colección a lo más numerable de eigenvalores $\{-\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ con sus correspondientes eigenvectores $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ (uno por cada $-\lambda_n$). Podemos pensar que cualquier solución x de la ecuación $Lx = y$ es tal que $x \in \langle\{e_n\}\rangle$, por lo que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$. Así, el operador L podría representarse como

$$Lx = -\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle \lambda_n e_n.$$

Usando el Teorema 4.3.1, podemos resolver $Lx = y$ mediante

$$\begin{aligned} x(t) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \langle y, e_n\rangle e_n(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} e_n(t) \int_a^b y(s) e_n(s) ds \\ &= -\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n(t) e_n(s)}{\lambda_n} y(s) ds, \end{aligned} \tag{4.18}$$

para cada $t \in [a, b]$. Con esto llegamos a la expresión

$$x(t) = \int_a^b K(t, s)y(s)ds,$$

donde $K(t, s) := -\sum_{n=1}^{\infty} e_n(t)e_n(s)/\lambda_n$.

Por otro lado, sabemos que la solución x debe cumplir las condiciones (4.2). Supongamos que tenemos dos soluciones u y v linealmente independientes, y que u cumple $\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0$ y v cumple $\beta_1 v(b) + \beta_2 v'(b) = 0$. Entonces resulta que la expresión

$$v(t) \int_a^t u(s)y(s)ds + u(t) \int_t^b v(s)y(s)ds \tag{4.19}$$

satisface (4.2), pero (4.19) puede obtenerse de construir

$$K(t, s) = \begin{cases} \lambda v(t)u(s) & a \leq s \leq t \leq b \\ \lambda u(t)v(s) & a \leq t \leq s \leq b \end{cases},$$

para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. A dicho kernel se le llama la **función de Green**, y veremos posteriormente que conviene pedir adicionalmente que u y v resuelven el problema homogeneo $Lx = 0$.

Demostremos pues que dicho kernel ayuda a resolver el PSL.

Teorema 4.3.2. *Considere el operador $Lx := (px')' + qx$ con $p, q \in C[a, b]$ y $p(t) \neq 0$ para toda $t \in [a, b]$, y el subespacio*

$$X := \left\{ x \in L_2[a, b] : x \in C^2[a, b] \text{ y tal que } \begin{array}{c} \alpha_1 x(a) + \alpha_2 x'(a) = 0 \\ \beta_1 x(b) + \beta_2 x'(b) = 0 \end{array} \right\},$$

con $|\alpha_1| + |\alpha_2| > 0$ y $|\beta_1| + |\beta_2| > 0$. Sean v y u soluciones linealmente independientes de $Lx = 0$ con condiciones $\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0$ y $\beta_1 v(b) + \beta_2 v'(b) = 0$, respectivamente, y defina

$$\lambda := (p(a)(v(a)u'(a) - v'(a)u(a)))^{-1}. \tag{4.20}$$

Entonces $L : X \to L_2[a, b]$ tiene inverso por la derecha dado por

$$(Ty)(t) := \int_a^b G(t, s)y(s)ds, \; t \in [a, b],$$

donde

$$G(t, s) := \begin{cases} \lambda v(t)u(s) & a \leq s \leq t \leq b \\ \lambda u(t)v(s) & a \leq t \leq s \leq b \end{cases}$$

Demostración. Asumamos primero que $\lambda \neq 0$. Esto surge porque p nunca es cero, y como u y v son lineamente independientes, por el Teorema 1.4.6 el determinante Wronskiano nunca es cero, i.e. $w(t) := v(t)u'(t) - u(t)v'(t) \neq 0$ para toda $t \in [a, b]$. También tenemos que w es de hecho una constante en todo

$[a,b]$, pues por hipótesis $vLu - uLv = 0$ y usando la identidad de Lagrange vemos que $p(t)(v(t)u'(t) - u(t)v'(t))$ es constante para toda $t \in [a,b]$.

Para ver que T es inversa de L, dado $y \in L_2[a,b]$ definamos $x := Ty$ y verifiquemos que $Lx = y$. Tenemos que

$$\begin{aligned} x(t) = \int_a^b G(t,s)y(s)ds &= \int_a^t \lambda v(t)u(s)y(s)ds + \int_t^b \lambda u(t)v(s)y(s)ds \\ &= \lambda v(t)\int_a^t u(s)y(s)ds + \lambda u(t)\int_t^b v(s)y(s)ds, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} x'(t) &= \lambda v(t)u(t)y(t) + \lambda v'(t)\int_a^t u(s)y(s)ds - \lambda u(t)v(t)y(t) + \lambda u'(t)\int_t^b v(s)y(s)ds \\ &= \lambda[v'\int_a^t uy + u'\int_t^b vy], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x''(t) &= \lambda v'(t)u(t)y(t) + \lambda v''(t)\int_a^t uy - \lambda u'(t)v(t)y(t) + \lambda u''(t)\int_t^b vy \\ &= \lambda\left[v''\int_a^t uy + u''\int_t^b vy\right] + \lambda y[v'u - u'v]. \end{aligned}$$

Así, usando el Lema 4.1.5 y el hecho de que w es constante,

$$\begin{aligned} px'' + p'x' + qx &= \lambda pv''\int_a^t uy + \lambda pu''\int_t^b vy + \lambda y\frac{1}{\lambda} \\ &+ \lambda p'v'\int_a^t uy + \lambda p'u'\int_t^b vy \\ &+ \lambda qv\int_a^t uy + \lambda qu\int_t^b vy = y. \end{aligned}$$

Observese que las primeras dos columnas están en terminos de Lu y Lv, por lo que se anulan. Además, vimos que (4.19), que es en realidad Ty, satisface las condiciones de frontera (4.2). □

En el teorema anterior, a T se le llama el operador de Green asociado al operador L.

Nota 4.3.3. La conclusión del teorema anterior es que bajo ciertas condiciones podemos resolver la ecuación diferencial de orden 2 con valores en la frontera. Note que la existencia del operador de Green implica que podemos encontrar una única solución. Sin embargo, la no-existencia de la función de Green no impide que podamos resolver el problema de frontera. De hecho podrían en cambio exisistir muchas soluciones, vea por ejemplo el problema 4.6.9.

Proposición 4.3.4. *Sean* $\{\alpha_n, e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *los eigenvalores y eigenvectores del operador* T *provenientes del Teorema 3.3.4, entonces*
i) $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es base de* X *y de* $L(X)$, *y*
ii) $\{\alpha_n^{-1}, e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *son eigenvalores y eigenvectores de* $L : X \to L_2[a, b]$.

Ejemplo 4.3.5. Con los resultados anteriores se pueden resolver los siguientes problemas.
i)Encuentrar los eigenvalores λ y eigenfunciones en el siguiente problema de frontera,

$$x''(t) + \lambda x(t) = 0,\ x(-\pi) = x(\pi) = 0.$$

ii) Encuentrar también el operador de Green del problema de Sturm-Liouville asociado al inciso i), describiendo claramente su dominio e imagen.
iii) Expresar con una serie el operador diferencial asociado al problema, y describa claramente su dominio e imagen.

Solución i) Como se llevó a cabo en el Ejemplo 4.1.6 se muestra que cualquier eigenvalor es positivo. Además, $\cos(\sqrt{\lambda}t)$ y $\sin(\sqrt{\lambda}t)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial $x'' + \lambda x = 0$. Usando la Proposición 4.1.7, λ es eigenvalor si y solo si

$$\begin{vmatrix} \cos(-\sqrt{\lambda}\pi) & \sin(-\sqrt{\lambda}\pi) \\ \cos(\sqrt{\lambda}\pi) & \sin(\sqrt{\lambda}\pi) \end{vmatrix} = 0.$$

Usando una identidad trigonométrica, el lado izquierdo es $\sin(2\pi\sqrt{\lambda})$, entonces los eigenvalores son $\lambda_k := (k/2)^2, k = 1, 2, \ldots$. Y las correspondientes eigenfunciones son $e_k(t) := \alpha_k \cos(\sqrt{\lambda_k}t) + \beta_k \sin(\sqrt{\lambda_k}t)$ para $k = 1, 2, \ldots$, donde los escalares son tales que $e_k(-\pi) = e_k(\pi) = 0$.

ii) Ahora, usando el Teorema 4.3.2, tenemos que las funciones $u(t) := t+\pi$ y $v(t) := t - \pi$ son soluciones del problema homogeneo $x''(t) = 0$, son linealmente independientes, y cumplen con $u(-\pi) = 0$ y $v(\pi) = 0$. De esto resulta que (4.20) es $-1/2\pi$. Por lo que se puede construir el operador de Green T como está descrito en el Teorema. Más aún, se tiene que $T : L_2[-\pi, \pi] \to X$, con X descrito en el Teorema.

Usando el Teorema espectral y el Ejercicio 3.4.14 (vea la Proposición 4.3.4), otra forma de expresar el operador de Green T es mediante la expansión (4.18), usando los eigenvectores y eigenvalores del inciso i). Esto hecho se ocupará en la parte iii).

iii) Como se acaba de mencionar, el operador de Green T admite la expansión (4.18). Entonces podemos usar el Teorema 4.3.1 para invertir T y encontrar la expansión deseada del operador diferencial $L : X \to L_2[-\pi, \pi]$. Este procedimiento nos dá que para $g \in X$

$$[Lg](t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k(t) \int_{-\pi}^{\pi} e_k(s)g(s)ds,\ t \in [-\pi, \pi],$$

donde λ_k y e_k son los eigenvalores y eigenfunciones del inciso i).

Concluimos con el siguiente resultado. Tomando en cuenta las condiciones (4.2) podemos obtener que

Teorema 4.3.6. *El operador $(Lx)(t) := p(t)x''(t) + q(t)x' + r(t)x(t)$, con p, q, r continuas y p y r no nulas en todo $[a, b]$, poseé un conjunto infinito numerable de eigenvectores $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, i.e. $Le_n = \alpha_n e_n$, los cuales forman un conjunto ortonormal en el espacio de funciones medibles cuadrado integrables c.r.al producto interno especificado con la función de peso*

$$w(t) := \frac{1}{p(t)} e^{\int_a^t \frac{q(s)}{p(s)}} ds.$$

Nota 4.3.7. Un tema relevante donde los resultados de esta sección son de interés es en la teoría de polinómios ortogonales; en el apéndice hay una introducción a este tema.

4.4 Método de separación de variables para EDP

Considere el siguiente problema de frontera. Encontrar $u(x, t)$ tal que

$$r(x)m(t)\frac{du}{dt} = \frac{d}{dx}(p(x)\frac{du}{dx}) + q(x)u, \; x \in (a, b), \; t > 0, \tag{4.21}$$

con condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \alpha_1 u(a, t) + \alpha_2 \frac{du}{dx}(a, t) = 0, \; t \geq 0, \\ \beta_1 u(b, t) + \beta_2 \frac{du}{dx}(b, t) = 0, \; t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), \; x \in (a, b), \end{aligned} \tag{4.22}$$

con la restricción $|\alpha_1| + |\alpha_2| > 0$, $|\beta_1| + |\beta_2| > 0$. Además asumimos que $p, p', q, r, f \in C[a, b]$; $p, r > 0$; $m \in C[0, \infty]$ y $m > 0$; y que f es consistente con las condiciones anteriores, i.e. f satisface las ecuaciones de frontera sobre a y b. Bajo estas condiciones decimos que el problema es **regular**.

Cuando $\alpha_1 = \beta_1 = 1$ y $\alpha_2 = \beta_2 = 0$, decimos que las **condiciones son de Dirichlet**. Pero si $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ y $\alpha_2 = \beta_2 = 1$ las llamamos **condiciones de Neumann**.

El método de separación de variables para resolver el problema descrito consiste en suponer que la solución es una combinación lineal de funciones de la forma $g(t)h(x)$. Al substituir en (4.21) llegamos a la ecuación

$$m(t)\frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{(p(x)h'(x))' + q(x)h(x)}{r(x)h(x)}.$$

Sin embargo, como esta relación se cumple para toda t y x, ambos lados deben ser la misma constante para todo t y x, pues un lado depende exclusivamente de t y el otro de x. Llamemos a dicha constante $-\lambda \in \mathbb{R}$.

Tenemos pues las siguientes ecuaciones:

$$(ph')' + qh + \lambda rh = 0, \;\; x \in (a,b) \tag{4.23}$$

$$mg' = -\lambda g, \;\; t > 0. \tag{4.24}$$

Usando las condiciones (4.22) llegamos a las siguientes condiciones sobre h:

$$\begin{aligned} \alpha_1 h(a) + \alpha_2 h'(a) &= 0 \\ \beta_1 h(b) + \beta_2 h'(b) &= 0. \end{aligned} \tag{4.25}$$

De esta manera, la ecuación (4.23) junto con las condiciones (4.25) definen un problema de Sturm-Liouville de eigenvalores , Definición 4.1.4. Podemos entonces intentar resolver primero el problema de eigenvalores, después resolver la ecuación (4.24), y finalmente unir piezas tomando en cuenta la condición inicial $u(x,0) = f(x)$ en (4.22). Veamos el siguiente ejemplo de una **ecuación parabólica**.

Ejemplo 4.4.1. (**Ecuación del calor**) Considere el problema regular (con $\kappa > 0$)

$$\begin{aligned} u_t = \kappa u_{xx}, \;\; x \in (0,1), \;\; t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \;\; t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x), \;\; x \in [0,1], f(0) = f(1) = 0. \end{aligned} \tag{4.26}$$

De acuerdo a (4.23), (4.24) y (4.25), queremos resolver

$$h''(x) + \lambda h(x) = 0, \;\; x \in (0,1), \;\; g'(t) = -\lambda \kappa g(t), \;\; t > 0, \;\; h(0) = h(1) = 0. \tag{4.27}$$

De acuerdo con el Ejemplo 4.1.6, los eigenvalores y eigenvectores están dados por $\lambda_n := (n\pi)^2$ y $e_n(x) := \sin(n\pi x)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Ahora bien, encontrados los valores λ_n, la solución de la segunda ecuación en (4.27) es $g_n(t) := c_n e^{-\kappa \lambda_n t}$, donde c_n es alguna constante real. Vemos pues que, para cada $n = 1, 2, \ldots,$, la función $u_n(x,t) := c_n e_n(x) e^{-\kappa \lambda_n t}$ resuelve la ecuación diferencial parcial en (4.26) y cumple las condiciones de frontera en 0 y 1.

Podemos aplicar el **principio de superposición**, el cual afirma que combinaciones lineales finitas de $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ también resuelve la ecuación diferencial y cumple las condiciones de frontera. Posteriormente, si $f \in \langle \{e_n\}_{n=1}^{\infty} \rangle$, podemos escojer las constantes c_n de tal manera que $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$, para finalmente intentar verificar que la función $u := \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es solución al problema (4.26).

Nota 4.4.2. Del ejemplo anterior, queda claro que los pasos a seguir para resolver el problema (4.21)-(4.22) son:
1) Resolver el problema SL2 dado por (4.23) y (4.25), con lo cual encontramos el conjunto $\{\lambda_n, e_n\}_{n=1}^{\infty}$.
2) Usando los valores λ_n resolvemos (4.24) para llegar a

$$g_n(t) := \exp\left\{ -\lambda_n \int_a^t \frac{ds}{m(s)} \right\},$$

$n = 1, 2, \ldots$.
3) Encontramos constantes $c_1, c_2, \ldots$ tales que $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$. De tal manera que un candidato para la solución de (4.21)-(4.22) está dado por

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) e_n(x). \tag{4.28}$$

Tenemos los siguientes resultados que ayudan a verificar si (4.28) está bien definido y para ver si es efectivamente solución del problema.

Lema 4.4.3. *Para cada $x \in [a,b]$ fijo, la suma (4.28) es uniformemente convergente en $t \geq 0$.*

Demostración. Surge de saber que $\lambda_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$. □

Con el lema anterior, podemos usar el siguiente tipo de resultado para concluir que (4.28) cumple lo deseado. La demostración se puede encontrar en libros de análisis matemático, vea por ejemplo el apéndice en [4].

Teorema 4.4.4. *Sea $S \subset \mathbb{R}$ un abierto, y $f_n : S \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones continuamente diferenciables tales que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ convergen uniformemente en S. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es diferenciable y su derivada es de hecho $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$.*

Presentamos ahora un ejemplo de una **ecuación hiperbólica** donde se puede aplicar el método de separación de variables.

Ejemplo 4.4.5. (**Ecuación de onda**)
Sea $c > 0$, y considere el problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx},\ x \in (0,1),\ t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0,\ t \geq 0 \\ u(x,0) = f_1(x),\ x \in [0,1], f_1'(0) = f_1'(1) = 0. \\ u_t(x,0) = f_2(x),\ x \in [0,1], f_2'(0) = f_2'(1) = 0. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Asumiendo una solución particular de la forma $u(x,t) = h(x)g(t)$, obtenemos que debe cumplirse

$$h''(x) = -\lambda h(x),\ x \in (0,1)\ g''(t) = -\lambda c^2 g(t),\ t > 0,\ h'(0) = h'(1) = 0. \tag{4.30}$$

Analizando eigenvalores y eigenvectores obtenemos que $\lambda_n := (n\pi)^2$ y que $e_n(x) := \cos(n\pi x)$, $n = 1, 2, \ldots$; y también que $\lambda_0 = 0$ y $e_0(x) = 1$.

Así, las soluciones de la segunda ecuación en (4.30) son

$$\begin{aligned} g_0(t) := \gamma_0 + \delta_0 t, \\ g_n(t) := \gamma_n \cos(\sqrt{\lambda_n} ct) + \delta_n \sin(\sqrt{\lambda_n} ct),\ n = 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

con $\{\gamma_n, \delta_n\}_{n=0}^{\infty}$ números reales. Entonces la posibles solución al problema es de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(t)e_n(x).$$

Luego, para encontrar los coeficientes $\{\gamma_n, \delta_n\}_{n=0}^{\infty}$, substituimos la suma anterior en las condiciones $u(x,0)$ y $u_t(x,0)$. Como $f_1, f_2 \in \langle \{e_n\}_{n=0}^{\infty} \rangle$, podemos definir $\{\gamma_n, \delta_n\}_{n=0}^{\infty}$ justamente para cumplan que $f_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n e_n$ y $f_2 = \delta_0 e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n c\sqrt{\lambda_n} e_n$. Así, la función $u = \sum_{n=0}^{\infty} g_n e_n$ es candidato a resolver el problema.

4.5 La transformada de Fourier

Finalizaremos este capítulo dando una motivación a la transformada de Fourier, una de las herramientas más importantes en matemáticas. Para esto trataremos de utilizar el método de separación de variables, visto anteriormente, pero de una manera informal.

Consideremos la ecuación del calor sobre toda la recta real:

$$\begin{aligned} u_t = u_{xx},\ x \in \mathbb{R},\ t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x) \in C_0,\ \textit{i.e. } f \text{ es continua y } \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0. \end{aligned}$$

Aplicando el método de separación de variables, asumiendo la forma $u(x,t) = h(x)g(t)$, llegamos a las ecuaciones

$$h''(x) + \lambda h(x) = 0 \text{ y } g'(t) = -tg(t).$$

Dado que f es acotada y que la solución del problema representa la temperatura, se puede pensar que u es acotada en $\mathbb{R} \times [0, \infty)$, entonces las soluciones a los problemas planteados cuando $\lambda > 0$ son de la forma

$$\begin{aligned} h(x) = \alpha \cos(\sqrt{\lambda}x) + \beta \sin(\sqrt{\lambda}x) \\ g(t) = e^{-\sqrt{\lambda}t}, \end{aligned}$$

con α y β constantes. Podemos escribir $h(x,\lambda)$ y $g(t,\lambda)$ para enfatizar la dependencia con λ.

A diferencia de la sección anterior, en este caso $h(x,\lambda)g(t,\lambda)$ es una solución de la ecuación parcial válida para todo $\lambda > 0$. Análogamente con la secci
om anterior, note que las constantes α y β varian dependiendo del valor de λ, por eso podemos pensarlas como funciones de λ. Con esta forma de pensar llegamos y definiendo $\omega := \sqrt{\lambda}$ podemos pensar que

$$e^{-\omega^2 t}\{\alpha(\omega)\cos(\omega) + \beta(\omega x)\sin(\omega x)\}$$

es solución de la ecuación parcial.

Así, usando el principio de superposición, en lugar de una suma como funcionó para un intervalo finito, podemos pensar ahora que la solución buscada está dada por la expresión

$$\int_0^\infty e^{-\omega^2 t}\left\{\alpha(\omega)\cos(\omega x)+\beta(\omega)\sin(\omega x)\right\}d\omega.$$

Definamos ahora

$$F(\omega):=\begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha(\omega)-i\beta(\omega)), & \omega\geq 0\\ \frac{1}{2}(\alpha(\omega)+i\beta(\omega)), & \omega<0.\end{cases}$$

O sea que

$$\begin{aligned}\alpha(\omega)&=F(\omega)+F(-\omega),\ y\\ \beta(\omega)&=i(F(\omega)-F(\omega)).\end{aligned}$$

Además, recordando las identidades

$$\sin(\omega x)=\frac{e^{i\omega x}-e^{-i\omega x}}{2i}\ \text{ y }\ \cos(\omega x)=\frac{e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}}{2},$$

sustituimos en la integral anterior para obtener

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty e^{-\omega^2 t}\left\{F(\omega)e^{i\omega x}+F(-\omega)e^{-i\omega x}\right\}d\omega\\ =\ &\int_0^\infty e^{-\omega^2 t}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega+\int_{-\infty}^0 e^{-\omega^2 t}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega\\ =\ &\int_\infty^\infty e^{-\omega^2 t}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega.\end{aligned}$$

Finalmente, teniendo en cuenta la condición inicial en $t=0$, queremos encontrar $F:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ tal que

$$\int_{-\infty}^\infty F(\omega)e^{i\omega x}d\omega=f(x).$$

Matemáticamente tal F es justamente la transformada de Fourier de f, es decir

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-i\omega x}dx.$$

Se puede interpretar la transformada de Fourier como los "los coeficientes de Fourier" de la sección anterior, y la integral sería "la combinación lineal" para encontrar la solución.

4.6 Ejercicios

4.6.1. Considere el operador de Sturm-Liouville $Lx := -x''$ y las condiciones de frontera $x'(0) = 0$ y $x'(1) = 0$. Encuentre el conjunto de eigenvalores de L y los correspondientes eigenvectores que satisfacen las condiciones de frontera.

4.6.2. Considere la EDO $x'' + qx' + rx = y$ con q, r, y funciones continuas en t. Demuestre que la solución general de esta ecuación está dada por $x = fx_1 + gx_2$, donde f, g son funciones de t, y x_1, x_2 son soluciones de la EDO homogenea. Nota: este es el método de variación de parámetros.

4.6.3. Encontrar los eigenvalores y eigenvectores del operador $Tx := -x''$ en los siguientes espacios
i) $X := C^2[0, \pi]$,
ii) $Y := \{x \in X : x(0) = x(\pi) = 0\}$.

4.6.4. Sea $\alpha > 0$. Muestre que el problema

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0,\ x \in (0,1),\ u(0) = 0,\ \alpha u(1) + u'(1) = 0,$$

no admite eigenvalores λ negativos y tampoco puede ser 0. Muestre que para ser λ eigenvalor debe cumplir la ecuación $\tan(\sqrt{\lambda}) = -\sqrt{\lambda}/\alpha$.

4.6.5. i) En el contexto de un problema regular, considere las ecuaciones

$$(p_i(x)h'(x))' + g_i(x)h(x) = 0,\ i = 1, 2 \text{ con } p_1 \geq p_2 > 0,\ g_1 < g_2.$$

Diga que relación hay entre θ_1 y θ_2 del método de Prüfer, considerando que $\theta_1(a) = \theta_2(a)$ y donde $[a, b]$ es el dominio de h.
ii) En un problema de Sturm-Liouville regular explique porque el número de ceros de las eigenfunciones aumenta al aumentar el eigenvalor.

4.6.6. Argumente, usando el métod de Prüfer, que la eigenfución e_n del problema SL2 tiene $n - 1$ ceros en el intervalo $[a, b]$.

4.6.7. ¿Cuál es el operador de Green asociado la ecuación $x'' + x = y$ con condiciones $x'(0) = 0$ y $x(\pi) = 0$?

4.6.8. Encuentre la función de Green del problema

$$x'' - 3x' + 2x = y, \quad x(0) = x(1) = 0.$$

4.6.9. Encuentre los valores $q \in \mathbb{R}$ para los cuales el problema

$$y''(t) + qy(t) = 1,\ y(0) = y(1) = 0,$$

no tiene solución.
Sugerencia: Aunque no hay función de Green, busque soluciones de la forma $1 - \cos(cx)$.

4.6.10. Para encontrar la función de Green asociado a la ecuación $x'' - tx = y$, hay que resolver la ecuación de Airy $x'' - tx = 0$. Use el método de soluciones en serie (i.e. pensar que x es de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ con los a_n's constantes) para encontrar la solución general de la ecuación homogenea.

4.6.11. Dado un operador T compacto y auto-adjunto en un espacio de Hilbert, ¿qué haría para invertirlo si T fuera inyectivo?

4.6.12. Sea $r \in C[0, \pi]$ estrictamente positive. Encuentre el inverso por la derecha del operador

$$[Lx]t := r(t)x''(t) + r(t)x(t), \ t \in [0, \pi],$$

con condiciones $x(0) = x'(\pi) = 0$.

4.6.13. Verificar a detalle el Lema 4.4.3 y que (4.28) es efectivamente solución del problema.

4.6.14. Verifique que el siguiente problema es regular:

$$u_t(t, x) = u_{xx}(t, x) + u(t, x), \ (t, x) \in [0, \infty) \times (0, \pi);$$

$$u(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0, t \geq 0; \ u(0, x) = f(x), x \in [0, \pi],$$

donde $f(0) = f'(\pi) = 0$. Calcule eigenvalores y eigenfunciones asociados al problema. ¿Cuáles son los eigenvalores del operador de Green en el ejercicio 4.6.12 cuando $r := 1$?

4.6.15. i) Muestre que la solución de la ecuación del calor vista en clase está dada por

$$u(x, t) = \int_0^1 K(x, y, t) f(y) dy,$$

donde K es el **kernel del calor** dado por

$$k(x, y, t) := 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\kappa (n\pi)^2 t} \sin(n\pi x) \sin(n\pi y).$$

ii) ¿Qué puede decir para el problema general?

Capítulo 5

Apéndice

5.1 Ecuaciones diferenciales: ideas básicas

Sea $a < b$ números reales. El conjunto $C^r[a,b]$ denota el espacio de funciones r veces continuamente diferenciables sobre $[a,b]$.

Definición 5.1.1. Sea $F : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$, es decir $F(t, x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$. Se dice que $x \in C^n[a,b]$ es **solución** de la **ecuación diferencial ordinaria**

$$F(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0,$$

cuando $(\forall t \in [a,b]) F(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)) = 0$. Aqui $x^{(r)}$ denota la r-ésima derivada.

El los extremos $t = a, b$ solo pedimos existencia de derivadas por la izquierda y derecha respectivamente.

Ejemplo 5.1.2.
(i) Si $n = 0$, no hay diferencial, tendriamos entonces una **ecuación funcional**. Digamos que $F(t, x_0) := t + \sin(t + x_0) + x_0^3$, entonces buscamos $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $(\forall t \in [a,b]) t + \sin(t + x(t)) + x(t)^3 = 0$.
(ii) Definamos ahora $F(t, x_0, x_1) := x_1 - f(t)$, entonces buscamos $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $(\forall t \in [a,b]) x'(t) - f(t) = 0$.

Por el momento, en esta sección trabajaremos con **ecuaciones separables** y de **primer orden**, es decir cuando $n = 1$ y $F(t, x_0, x_1) := x_1 - f(t)g(x_0) - h(t)$ con f, g y h conocidas. Así, la ecuación diferencial toma la forma

$$x'(t) = f(t)g(x(t)) + h(t).$$

<u>Método de separación de variables.</u>
<u>Caso $h := 0$</u>. Supongamos que g no se anula en $\mathbb{R}$. A partir de $x'(t) = f(t)g(x(t))$ tenemos que

$$\frac{x'(t)}{g(x(t))} = f(t).$$

De esto se observa que buscamos $H : [a, b] \to \mathbb{R}$ con $H'(u) = 1/g(u)$ y tal que

$$H(x(t)) = \int_a^t f(s)ds + \alpha,$$

donde α es constante. Así, si H fuera invertible

$$x(t) = H^{-1}\left(\alpha + \int_a^t f(s)ds\right).$$

Caundo se conoce el valor $x(a)$, decimos que tenemos un **problema de valor inicial**(PVI).

Ejemplo 5.1.3. Queremos encontrar $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ que resuelve $x' = e^{-x}(t+t^3)$ con $x(1) = 1$. Tenemos pues que $x'e^x = t + t^3$, entonces

$$\int_{x(1)}^{x(t)} e^s ds = \int_1^t (s + s^3)ds,$$

luego $e^{x(t)} - e^{x(1)} = \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} - \frac{3}{4}$, por lo tanto $x(t) = \log\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} - \frac{3}{4} + e\right)$.

<u>Caso $h := 0$ y $g(x) := x$ (ecuación homogenea)</u>. En este caso $F(t, x_0, x_1) := x_1 - f(t)x_0$. Como $x'(t)/x(t) = \frac{d}{dt}\log(|x(t)|)$, tenemos pues que

$$H(x(t)) = \log(|x(t)|) = \int_a^t f(s)ds + c.$$

Luego $x(t) = v \exp\left(\int_a^t f(s)ds\right)$ con v constante.

<u>Caso $h :\neq 0$ y $g(x) := x$ (ecuación no-homogenea)</u>. Sea $F(t, x_0, x_1) := x_1 - f(t)x_0 - h(t)$, entonces queremos resolver $x' = f(t)x + h(t)$. Reflexionando un poco es natural suponer que $x(t) = v(t)\exp\left(\int_a^t f(s)ds\right)$, luego

$$x'(t) = v(t)f(t)e^{\int_a^t f(s)ds} + v'(t)e^{\int_a^t f(s)ds}.$$

Como también $x'(t) = f(t)v(t)\exp\left(\int_a^t f(s)ds\right) + h(t)$, entonces

$$h(t) = v'(t)\exp\left(\int_a^t f(s)ds\right).$$

Por lo tanto $v'(t) = h(t)\exp\left(-\int_a^t f(s)ds\right)$. Integrando

$$v(t) = \int_a^t h(s)e^{-\int_a^s f(u)du}ds + c,$$

con c constante. Podemos entonces concluir que

$$x(t) = e^{\int_a^t f(s)ds}\left(\int_a^t h(s)e^{-\int_a^s f(u)du}ds + c\right).$$

Ejemplo 5.1.4.
(i) Considere $x' = 1 + x^2$ con $x(0) = 1$. Así,

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{1}{1+s^2} ds = \int_0^t ds,$$

luego $\arctan(x(t)) - \arctan(x(0)) = t$, por lo que $x(t) = \tan(t + \pi/4)$ para $t \in \left[-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi\right]$.
(ii) Considere $x' = -t/x$ con valor inicial $x(a)$. De esto,

$$\int_{x(a)}^{x(t)} sds = -\int_a^t sds,$$

luego $x^2(t) + t^2 = a^2 + x^2(a)$. Sea $c := a^2 + x^2(a)$, entonces la solución al PVI es el conjunto de puntos

$$\{(t, x(t)) : t^2 + x^2(t) = c\},$$

i.e. el círculo! El conjunto de puntos que resuelven una ecuación diferencial puede formar lo que se llama una **variedad**.

Método de coeficientes indeterminados. Dado la ecuación $x' = f(t)x + h(t)$, podemos definir el operado lineal $T(x) := x' - f(t)x$. Si existe un espacio de dimensión finita X invariante con respecto a T, i.e. $T(X) \subset X$, podemos entonces encontrar la solución de $T(x) = h$ usando alguna base de X y suponiendo que h está en el rango $T(X)$. Notemos también que si $w \in X$ es tal que $T(w) = h$, entonces para todo z en $\{x : T(x) = 0\}$, se tiene que $w + z$ es también solución de $T(x) = h$. A $\{x : T(x) = 0\}$ se le llama el **espacio nulo** de T.

Ejemplo 5.1.5. Dada la ecuación $x' = x + \sin(t)$, vemos que T es cerrado en $X := \langle\{\sin(t), \cos(t)\}\rangle$. Esto dice que hay $u := \alpha \sin(t) + \beta \cos(t)$ tal que $u' = u + \sin(t)$; substituyento tenemos que

$$\alpha \cos(t) - \beta \sin(t) = \alpha \sin(t) + \beta \cos(t) + \sin(t),$$

por lo que $\alpha = \beta = -1/2$. Además, como $\langle\{e^t\}\rangle$ es espacio nulo de T, la solución general de la ecuación es

$$x(t) = ce^t - \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{1}{2}\cos(t),$$

con c constante.

Ejercicios

5.1.1. Resuelva el siguiente PVI:

$$x' = -\frac{1+x^2}{x}\sin(t), x(0) = 1.$$

5.1.2.
(i) ¿Cómo resolvería la ecuación $x' = f(x/t)$? Sugerencia: Haga un cambio de variable.
(ii) Resuelva $x' = 2x/t + (x/t)^2$.

5.1.3. Considere la ecuación $x' = x + e^{2t}$. ¿Cúal es el operador lineal L asociado y el espacio de dimensión finita X donde L es cerrado? ¿cúal sería el rango y el espacio nulo en X donde se puede resolver la ecuación?

5.1.4. Encuentre la solución general de $x' = \frac{\sin(t)-x}{t}$.

5.1.5. Encuentre la solución general de

$$(1+t^2)y'(t) + ty(t) = (1+t^2)^{5/2}.$$

5.1.6. Resuelva del PVI $\{y' + y = g(t),\ y(0) = 0\}$ donde

$$g(t) := \begin{cases} 2 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

5.1.7. Sean $a, c \in (0, \infty)$ y $b \in \mathbb{R}$. Muestre que cualquier solución de $y' + ay = be^{-ct}$ converge a cero cuando $t \to \infty$.

5.1.8. En las siguientes ecuaciones, determine que ocurren con la solución general cuando $t \to \pi/2$:

$$y' + y/t = t^{-2}, \qquad y' + y\ tan(t) = sen(t)cos(t).$$

5.2 Teoría de la medida

Definición 5.2.1. Sea X un conjunto arbitrario.
(i) El **conjunto potencia** de X es $\mathcal{P}(X) := \{A\colon\ A \subseteq X\}$.
(ii) Una **σ-álgebra** de conjuntos de X es una colección $\Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que $X \in \Omega$ y Ω es cerrado bajo complementos y uniones numerable.
(iii) Un par (X, Ω), con Ω σ-álgebra de X, se llama un **espacio medible**.
(iv) La σ-álgebra **generada** por una colección $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es la más pequeña que contiene a $\mathcal{F}$ (i.e. con menos elementos).
(v) Si τ es una topología en X, la σ-álgebra **de Borel** correspondiente es la σ-álgebra generada por τ.

Definición 5.2.2. Sea Ω una σ-álgebra.
(i) Una función $\mu\colon \Omega \to [0, \infty]$ es una **medida** si $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ para cualesquier $A_1, A_2, \ldots$ ajenos y $\mu(\emptyset) = 0$.
(ii) Un **espacio con medida** es una tripleta (X, Ω, μ). Es **σ-finito** si se puede escribir $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_n$ con $\mu(X_n) < \infty$.

Ejemplo 5.2.3. Considere $X := \mathbb{R}$. En X podemos medir intervalos con la función longitud l, por ejemplo, $l((a,b]) = b-a$. Si queremos medir algún otro conjunto $A \subset X$, podemos "aproximarlo" con conjuntos que sí sabemos medir con l, consideremos pues la **medida exterior**

$$\nu(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} l(E_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i,\ E_i = (a_i, b_i],\ i = 1, 2, \ldots\right\}.$$

De esta manera cualquier elemento de $\mathcal{P}(X)$ tiene una medición, además concide con la longitud cuando A es un intervalo. El problema es que $\nu : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ no cumple ser una medida en el sentido de la Definición 5.2.2. Sin embargo, podemos restringir ν a una subclase de $\mathcal{P}(X)$ donde efectivamente ν cumple las condiciones deseadas. Consideremos el siguiente resultado.

Teorema 5.2.4. ***(de Carathéodory)*** *Con las condiciones del ejemplo anterior. Existe una familia maximal Ω en $\mathcal{P}(X)$, bajo la cual ν es una medida. Tal Ω resulta ser una σ-álgebra y tiene la propiedad de que*

$$(\forall A \in \Omega)(\forall B \in \mathcal{P}(X))\nu(B) = \nu(B \bigcap A) + \nu(B \bigcap A^c).$$

Así, sí λ es la restricción de ν en Ω, entonces (X, Ω, λ) es una espacio con medida, y a λ se le llama la ***medida de Lebesgue****.*

Definición 5.2.5. Sea (X, Ω) espacio medible y (Y, τ) espacio topológico. Una función $f\colon X \to Y$ es **medible** si $(\forall U \in \tau)\ f^{-1}(U) \subseteq \Omega$.

Proposición 5.2.6. *Las operaciones $f+g$, fg, $|f|$, $\sup f_n$, $\lim f_n$ conservan medibilidad.*

Definición 5.2.7. $f\colon X \to \mathbb{R}$ es **simple** si $f(X)$ es finito.

Así $f := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ es medible si los A_i's son medibles (χ_A es la función indicadora de A). De hecho una función simple siempre se puede expresar de esta forma con los A_i's ajenos.

Definición 5.2.8.
(i) La **integral** de una función simple es $\int (\sum \alpha_i \chi_{A_i})\, d\mu := \sum \alpha_i \mu(A_i)$ con los A_i's ajenos.
(ii) La **integral** de una función medible no negativa $f \geq 0$ es

$$\int f d\mu := \sup_{g \text{ simple},\ g \leq f} \int g\, d\mu.$$

(iii) La **integral** de una función medible f es $\int f\, d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^-\, d\mu$ donde $f^+ := \max(f, 0)$ y $f^- := (-f)^+$.
(iv) f es **integrable** si $\int |f|\, d\mu < \infty$, y el espacio $L_1(X, \Omega, \mu)$ es el conjunto de funciones integrables.
(v) $\int_E f\, d\mu := \int f\, \chi_E\, d\mu$.

Proposición 5.2.9. *La integral indefinida* $\nu(E) := \int_E f\,d\mu$ *es una medida cuando* f *es no negativa.*

Teorema 5.2.10. (de convergencia monótona de Lebesgue) *Sea* $f_1, f_2, \ldots$ *una sucesión creciente de funciones medibles no negativas tal que convergen a* f *puntualmente. Entonces* $\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu$.

Lema 5.2.11. (de Fatou) *Para cualquier sucesión de funciones medibles no negativas* f_n *se tiene* $\int \liminf f_n\,d\mu \leq \liminf \int f_n\,d\mu$.

Teorema 5.2.12. (de convergencia dominada) *Sean* $f_1, f_2, \ldots$ *un sucesión de funciones medibles que convegen puntualmente a* f*, y para las cuales* $|f_n| \leq g$ *con* g *integrable. Entonces* $\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu$.

Definición 5.2.13. Sean μ y ν dos medidas. Se dice que ν es **absolutamente continua** con respecto a μ, denotado $\nu \ll \mu$, si $\mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0$.

Teorema 5.2.14. (de Radon-Nykodym) *Sean* μ *y* ν *medidas* σ*-finitas y supóngase que* $\nu \ll \mu$*. Entonces existe* $f \geq 0$ *medible, denotada* $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ *y llamada la derivada de Radon-Nykodym, tal que* $\nu(E) = \int f_E\,d\mu$.

Definición 5.2.15. El espacio $L_p(X, \Omega, \mu)$ es $\{f\colon\ |f|^p \in L_1\}/\sim$, donde $f \sim g \iff \mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

Se sabe que L_p es un espacio lineal normado cuando $1 \leq p \leq \infty$, con norma $\|f\|_p := \left(\int |f|^p\right)^{1/p}$ cuando $1 \leq p < \infty$, y $\|f\|_\infty := \inf\{M\colon\ f \leq M \text{ para casi todo punto}\}$. **Para casi todo punto** significa que se cumple afuera de un conjunto de medida cero.

Teorema 5.2.16. (de Riesz-Fisher) *Para* $1 \leq p \leq \infty$*,* L_p *es completo.*

Por esta razón, estos espacios son de Banach y de hecho con $p = 2$ es espacio de Hilbert.

Teorema 5.2.17. (de representación de Riesz) *Sea* $F\colon L_p \to \mathbb{R}$ *un funcional lineal acotado donde* $1 \leq p < \infty$*. Entonces existe* $f \in L_q$ *(donde* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*) tal que* $(\forall g \in L_p)$ $F(g) = \int fg\,d\mu$ *y* $\|F\| = \|f\|_q$.

El siguiente resultado requiere la noción de **espacio producto**: dado espacios con medida (X, Ω_1, μ) y (Y, Ω_2, ν), podemos formar la σ-álgebra producto Ω en $X \times Y$, como la σ-álgebra generada por la colección

$$\{A \times B : A \in \Omega_1, B \in \Omega_2\}.$$

Y la **medida producto** λ es la restricción de la medida exterior de $A \in \Omega$

$$\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \times \nu(C_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (B_i \bigcup C_i),\ B_i \in \Omega_1, C_i \in \Omega_2,\ i = 1, 2, \ldots\right\}$$

a Ω.

Teorema 5.2.18. ***(de Fubini)*** *Sean* (X, Ω_1, μ) *y* (Y, Ω_2, ν) *dos espacios de medida* σ*-finitos. Sea también* f *integrable en el espacio producto* $(X \times Y, \Omega)$*. Entonces*

$$\int_{X\times Y} f d\mu \times \nu = \int_X \int_Y f d\nu d\mu = \int_Y \int_X f d\mu d\nu.$$

A la versión con f no-negativa (sin pedir integrabilidad) se le llama el Teorema de Tonelli.

5.3 El Teorema de Stone-Weierstrass

Dado X espacio topológico compacto y de Hausdorff, concideramos las funciones $C(X, \mathbb{R})$ con la métrica $\|\cdot\|_\infty$.

Definición 5.3.1. Un conjunto de funciones $\mathcal{F}$ que es cerrado bajo sumas y multiplicaciones, y también bajo multiplicación por escalar le llamamos **álgebra de funciones**. Decimos que tiene unidad si la función constante 1 está en $\mathcal{F}$.

Definición 5.3.2. Se dice que un subconjunto $\mathcal{F} \subseteq C(X, \mathbb{R})$ **separa puntos** si $(\forall x, y \in X : \ x \neq y)(\exists f \in \mathcal{F})\ f(x) \neq f(y)$.

Teorema 5.3.3. *(Stone-Weierstrass) Sea* X *un espacio de Hausdorff compacto. Sea* $\mathcal{F} \subseteq C(X, \mathbb{R})$ *una álgebra con unidad que separa puntos. Entonces* $\mathcal{F}$ *es denso en* $C(X, \mathbb{R})$ *con la norma del supremo.*

Primero tenemos el siguiente lema.

Lema 5.3.4. *Sea* $n \in \mathbb{Z}^+$*. Entonces existe un polinomio* p_n *con coeficientes reales tal que para* $t \in [-1, 1]$*,*

$$|p_n(t) - |t|\,| < \frac{1}{n}.$$

Demostración. Definamos $a_k(t) := (1 - t^2)^k$; cumple con $a_k(0) = 1$, $a_k(-1) = a_k(1) = 0$ y

$$(\forall \epsilon \in (0, 1))(\exists k)(\forall t)\epsilon \leq |t| \leq 1 \implies |a_k(t)| < \epsilon.$$

Ahora definamos

$$b_k(t) = \int_{-1}^{t} a_k(s) ds$$

la cual es creciente en $t \in [-1, 1]$. Normalizamos con $c_k(t) := b_k(t)/b_k(1)$, así $c_k(-1) = 0, \quad c_k(1) = 1$. Más aún, $c_k(t)$ está cerca de 0 para $-1 \leq t \leq -\epsilon$, y cerca de 1 para $\epsilon \leq t \leq 1$. Luego definimos

$$d_k(t) := \int_{-1}^{t} c_k(s)\, ds,$$

y vemos que $d_k(t)$ está cerca de 0 para $-1 \leq t \leq -\epsilon$, y cerca de $t = \int_0^t 1 ds$ para $\epsilon \leq t \leq 1$.

Finalmente definimos $e_k(t) := 2d_k(t) - t$. Entonces dado n, el polinomio deseado es $p_n := e_n$ para n suficientemente grande. $\square$

Ahora podemos probar el teorema.

Demostración. (1) $\overline{\mathcal{F}}$ es una álgebra:
Sean $f, g \in \overline{\mathcal{F}}$. Tomemos $f_n, g_n \in \mathcal{F}$ con $f_n \to f$, $g_n \to g$ cuando $n \to \infty$. Entonces $f_n + g_n \to f + g$, $f_n g_n \to fg$, $cf_n \to cf$ y como $\mathcal{F}$ es álgebra, $f_n + g_n \in \mathcal{F}$, $f_n g_n \in \mathcal{F}$, $cf_n \in \mathcal{F}$. Por lo tanto $f + g, fg \in \overline{\mathcal{F}}$, $cf \in \overline{\mathcal{F}}$.

(2) Sea p un polinomio real. Entonces $f \in \overline{\mathcal{F}} \implies p \circ f \in \overline{\mathcal{F}}$:
Por hipótesis $1 \in \overline{\mathcal{F}}$. Como $\overline{\mathcal{F}}$ es una álgebra tenemos
$f^2, f^3, \dots \in \overline{\mathcal{F}}$ y luego $p \circ f = \sum c_k f^k \in \overline{\mathcal{F}}$.

(3) $f \in \overline{\mathcal{F}} \implies |f| \in \overline{\mathcal{F}}$:
Para $f \neq 0$, definamos $g = f/\|f\|$. Luego $g \colon X \to [-1, 1]$, y $g \in \overline{\mathcal{F}}$. Por el Lema, para todo n hay un polinomio p_n con

$$|\, p_n \circ g - |g|\, | < \frac{1}{n}$$

lo cual dice que $p_n \circ g \to |g|$, y por (2) tenemos $p_n \circ g \in \overline{\mathcal{F}}$.
En consecuencia $|g| \in \overline{\mathcal{F}}$, luego $|f| \in \overline{\mathcal{F}}$.

(4) $f, g \in \overline{\mathcal{F}} \implies \max(f, g), \min(f, g) \in \overline{\mathcal{F}}$:
Estas expresiones son $(1/2)(f + g \pm |f - g|)$.

(5)(a) $x, y \in X,\ x \neq y \implies$

$$(\exists f \in \overline{\mathcal{F}})\ 0 \leq f \leq 1,\ f|_{\text{vec. de } x} = 0,\ f|_{\text{vec. de } y} = 1 :$$

Puesto que $\mathcal{F}$ separa, tomamos $f_1 \in \mathcal{F} \colon\ f_1(x) \neq f_1(y)$. Sea

$$f_2 = 3\frac{f_1 - f_1(x)}{f_1(y) - f_1(x)} - 1 \in \mathcal{F}$$

de manera que $f_2(x) = -1$, $f_2(y) = 2$. Sea $f = \min(\max(f_2, 0), 1)$. Por (4) sabemos $f \in \overline{\mathcal{F}}$ y por construcción f satisface lo requerido.

(5)(b) $A \subseteq X$ cerrado, $y \in X - A \implies$

$$(\exists f \in \overline{\mathcal{F}})\ \ 0 \leq f \leq 1,\ f|_A = 0,\ f|_{\text{vec. de } y} = 1 :$$

Como X es compacto, A es compacto. Por (5a) cada $x \in A$ tiene una vecindad U_x y una función $f_x \in \overline{\mathcal{F}}$ tal que $f_x|_{U_x} = 0$, $f_x(V_y) = 1$ para una vecindad V_y de y. Se cubre $A \subset \bigcup_1^n U_{x_i}$ y se toma $f = \min(f_{x_1}, \dots, f_{x_n}) \in \overline{\mathcal{F}}$ por medio de (4). Entonces f satisface las condiciones porque la intersección $\bigcap V_{x_i}$ de un número finito de vecindades de y es una vecindad de y.

(5)(c) $A, B \subseteq X$ cerrados, disjuntos $\implies$

$$(\exists f \in \overline{\mathcal{F}})\ 0 \leq f \leq 1,\ f|_A = 0,\ f|_B = 1:$$

Similar: se cubre $B = \bigcup V_i$ con $f_i|_A = 0$, $f_i|V_i = 1$, y se toma $f = \max(f_i)$.

(6) $\mathcal{F}$ es denso en $C(X,\mathbb{R})$:
Supongamos que no. Entonces hay $f \in C(X,\mathbb{R})$ tal que

$$d := \inf\{\|f-g\|:\ g \in \overline{\mathcal{F}}\} > 0.$$

Por definición de inf tomamos $g \in \overline{\mathcal{F}}$ tal que $\|f-g\| < (5/4)d$.
Sea $h = f - g$. Con los conjuntos

$$A := \{x:\ h(x) \leq -\frac{3}{8}d\}, \quad B := \{x:\ h(x) \geq \frac{3}{8}d\}$$

que son cerrados y ajenos, por (5c) podemos tomar $h_1 \in \overline{\mathcal{F}}$ con

$$-\frac{3}{8}d \leq h_1 \leq \frac{3}{8}d, \quad h_1|_A = -\frac{3}{8}d, \quad h_1|_B = \frac{3}{8}d.$$

Entonces usando $\|h\| < (5/4)d$ y el hecho que $|h| < 3d/8$ en $X - A \cup B$, tenemos (piense en cual es la longitud más grande)

$$|h - h_1| \leq \begin{cases} \left|-\frac{5}{4} - (-\frac{3}{8})\right| d = \frac{7}{8}d & \text{en } A, \\ 2 \cdot \frac{3}{8}d = \frac{6}{8}d & \text{en } X - (A \cup B), \\ \left|\frac{5}{4} - \frac{3}{8}\right| d = \frac{7}{8}d & \text{en } B. \end{cases}$$

Por eso tenemos $\|f - (g + h_1)\| = \|h - h_1\| < d$ con $g + h_1 \in \overline{\mathcal{F}}$, que es una contradicción de la definición de d. Por lo tanto $\overline{\mathcal{F}} = C(X,\mathbb{R})$. $\square$

Corolario 5.3.5. *(Teorema de Aproximación de Weierstrass) Toda función continua en un intervalo $[a,b]$ es un límite uniforme de polinomios reales.*

Corolario 5.3.6. *El conjunto de polinomios trigonométricos*

$$\{a_0 + \sum_1^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt)\}$$

es denso en el conjunto $\{f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ continuas tales que $f(-\pi) = f(\pi)\}$.

Ejercicios

5.3.1. Demuestre que la familia $\mathcal{F}$ de polinomios trigonométricos con coeficientes reales es una álgebra de funciones con unidad y que separa puntos. Concluya que $\mathcal{F}$ es denso en $X := (C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$.

5.3.2. Sea $\mathcal{F}$ la familia de polinomios reales y f función continua estrictamente creciente tal que $f(a) = a$ y $f(b) = b$. Demuestre que la familia $\{p \circ f : p \in \mathcal{F}\}$ es denso en $X := (C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$. Sugerencia: estudie el mapeo $p \mapsto p \circ f$ en X.

5.4 Teorema de Arzelá-Ascoli

Definición 5.4.1. Sea K un conjunto topológico y S un subconjunto de las funciones continuas valuadas en K, i.e. $S \subseteq C(K)$. Se dice que S es **equicontinuo** si

$$(\forall x \in K)(\forall \epsilon > 0)(\exists U(x,\epsilon) \text{ abierto}) \; |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

para toda $f \in S$ y toda $y \in U(x,\epsilon) \bigcap K$.
Por otro lado, si $C(S)$ es considerada con la norma del supremo, se dice que S es **relativamente compacto** si la cerradura de S es compacto.

Teorema 5.4.2 (Arzelá-Ascoli)**.** *Sea K un conjunto compacto y de Hausdorff, y sea $S \subseteq C(K)$. Entonces S es relativamente compacto si y sólo si S es acotado y equicontinuo.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Por ser $\overline{S}$ compacto existe $F = \{f_1, \ldots, f_n\} \subseteq S$ tal que $(\forall f \in S)(\exists f_i \in F)\; \|f - f_i\|_\infty < \epsilon/3$. Así, $\|f\|_\infty \leq \|f - f_i\|_\infty + \|f_i\|_\infty < \epsilon/3 + M$, donde $M := \max\{\|f_1\|, \ldots, \|f_n\|\}$; por lo tanto S es acotado.

(Equicontinuidad) Para $x \in K$ y $\epsilon > 0$ arbitrarios, sea $U_i(x,\epsilon)$ abierto tal que $(\forall y \in U_i(x,\epsilon))\; |f_i(x) - f_i(y)| < \epsilon/3, i = 1, \ldots, n$.
Luego, si $y \in U(x,\epsilon) = \bigcap_{i=1}^n U_i(x,\epsilon)$, entonces

$$(\forall f \in S)(\exists f_i \in F)\; |f(x) - f(y)| = |f(x) \pm f_i(x) \pm f_i(y) - f(y)| < \epsilon,$$

por lo tanto S es equicontinua.

($\Leftarrow$) Sea $\epsilon > 0$ fijo. Por ser S equicontinua y K compacto, existen $U(x_i,\epsilon), i = 1, \ldots, n$ que cubren K, y son tales que

$$(\forall f \in S)(\forall y \in U(x_i,\epsilon))\; |f(x_i) - f(y)| < \epsilon/3.$$

Como S es acotado, el conjunto $\{(f(x_1), \ldots, f(x_n)) \colon\; f \in S\}$ es acotado en $\mathbb{C}^n$ (y su cerradura es un compacto por el Teorema de Heine-Borel), por lo que existe $F = \{f_1, \ldots, f_m\} \subseteq S$ tal que

$$(\forall f \in S)(\exists f_r \in F)\; |(f(x_1), \ldots, f(x_n)) - (f_r(x_1), \ldots, f_r(x_n))| < \epsilon/3. \qquad (*)$$

Así, para $x \in K$ arbitrario, $x \in U(x_j,\epsilon)$ para algún $j = 1, \ldots, n$, y para cualquier $f \in S$ hay $f_r \in F$ con la propiedad $(*)$, por lo que

$$|f(x) - f_r(x)| \leq |f(x) \pm f(x_j) \pm f_r(x_j) - f_r(x)| < \epsilon.$$

Se sigue que $(\forall f \in S)(\exists f_r \in F)\; \|f - f_r\|_\infty < \epsilon$, por lo tanto S es totalmente acotado, luego relativamente compacto. □

5.5 Polinómios Ortogonales Clásicos

Definición 5.5.1. Sea μ una medida de Borel sobre $I := (a,b) \subset \mathbb{R}$. Sea

$$X := L^2((a,b),\mu) = \{f : (a,b) \to \mathbb{R} \text{ medibles } : \int_{(a,b)} f^2 d\mu < \infty\} \qquad (5.1)$$

Decimos que un conjunto de polinómios $p_0, p_1, \ldots$ (con p_n de grado $n \in \mathbb{N}$) es **ortogonal** c.r.a μ si

$$\int_{(a,b)} p_n(t)p_m(t)\mu(dt) = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ d_n & m = n \end{cases}$$

donde $d_n \neq 0$. Más aún, si $d_n = 1$, decimos que los polinomios forman una familia **ortonormal**.

Ejemplo 5.5.2. El proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt del conjunto $\{1, t, t^2, \ldots\}$ dá una familia ortonormal c.r.a a la medida de Lebesgue.

Nota 5.5.3. Para construir diferentes familias de polinómios ortogonales, podemos considerar una función $w : (a,b) \to \mathbb{R}^+$ medible y construir una medida $\mu(A) := \int_A w(t)\lambda(dt)$, donde λ es la medida de Lebesgue.

Lema 5.5.4. *Con las condiciones de la definición anterior, si $m < n$,*

$$\int_I t^m p_n(t)\mu(dt) = 0.$$

Demostración. Sea X_n el espacio de todos los polinomios sobre I de grado a los más n. Como $\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ es una base de X_n, hay constantes $c_0, c_1, \ldots, c_n$ tal que $t^m = \sum_{k=0}^m c_k p_k(t)$, luego

$$\int_I t^m p_n(t)\mu(dt) = \sum_{k=0}^{m} c_k \int_I p_k(t)p_n(t)\mu(dt) = 0. \tag{5.2}$$

□

Nota 5.5.5. En el siguiente resultado usamos el hecho de que el conjunto de polinómios de grado a lo más n, denotado X_n, es un subespacio cerrado de X, de la Definición 5.5.1.

Proposición 5.5.6. ***(recursión de polinómios ortogonales)*** *En el contexto del lema anterior, sea*

$$k_n := \frac{1}{n!}\frac{d^n p_n(t)}{dt^n},$$

i.e. k_n es el coeficiente del término t^n de p_n. Entonces

$$tp_n(t) = a_n p_{n+1}(t) + b_n p_n(t) + a_{n-1}p_{n-1}(t),$$

donde $a_n := k_n/k_{n+1}$ y $b_n := \int_I tp_n^2(t)\mu(dt)$.

Demostración. Sea X_{n+1} los polinómios de grado a lo más $n+1$ y consideremos la base $\{p_0, p_1, \ldots, p_{n+1}\}$. Así, usando la Nota 5.5.5

$$tp_n(t) = \sum_{k=0}^{n+1} c_k p_k, \text{ con } c_k := \int_I tp_n(t)p_k(t)\mu(dt).$$

Por el lema anterior $c_k = 0$ si $k-1 < n$, entonces $tp_n(t) = c_{n-1}p_{n-1}(t) + c_n p_n(t) + c_{n+1}p_{n+1}(t)$, y comparando coeficientes de mayor grado tenemos que $k_n = c_{n+1}k_{n+1}$. Ahora bien, como

$$c_{n+1} = \int_I tp_n(t)p_{n+1}(t)\mu(dt),$$

este mismo análisis en X_n daría

$$\int_I tp_n(t)p_{n-1}(t)\mu(dt) = \frac{k_{n-1}}{k_n},$$

por lo que $c_{n-1} = k_{n-1}/k_n$. Finalmente, por definición $c_n = \int_I tp_n^2(t)\mu(dt)$. $\square$

Enunciamos el siguiente teorema sin demostración.

Teorema 5.5.7. ***(de Favard)*** *Sea $\{p_0, p_1, \ldots\}$ polinómios que satisfacen la relación*

$$tp_n(t) = a_n p_{n+1}(t) + b_n p_n(t) + a_{n-1}p_{n-1}(t),$$

con $b_n > 0$ y $a_n \in \mathbb{R}$. Entonces hay una medida μ en $\mathbb{R}$ (no necesariamente única) tal que los polinómios son ortogonales c.r.a μ

Ahora queremos estudiar una familia particular de polinómios, donde μ está determinada por una función w que satisface la siguiente EDO

$$\frac{d}{dt}A(t)w(t) = B(t)w(t).$$

Definición 5.5.8. Sea $I := (a,b) \subset \mathbb{R}$. Los **polinómios ortonormales clásicos** (**POC**) es la familia de polinómios ortonormales c.r.a la función de peso $w : I \to \mathbb{R}$ que satisface

$$\frac{d}{dt}(A(t)w(t)) = B(t)w(t), \tag{5.3}$$

donde

$$A(t) := \begin{cases} 1-t^2 & si\ I = (-1,1) \\ t & si\ I = (0,\infty) \\ 1 & si\ I = (-\infty,\infty) \end{cases} \tag{5.4}$$

y $B(t)$ es un polinómio lineal, i.e. $B(t) = \alpha + \beta t$.

Al resolver (5.3) usando (5.4) llegamos a las siguientes familias

Table 1: familias de POC (donde $\alpha, \beta > -1$)

Polinómios	I	$A(t)$	$w(t)$	$B(t)$
Jacobi P_n	$(-1,1)$	$1-t^2$	$(1-t)^\alpha(1+t)^\beta$	$\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)t$
Laguerre L_n	$(0,\infty)$	t	$t^\alpha e^{-t}$	$\alpha+1-t$
Hermite H_n	$(-\infty,\infty)$	1	e^{-t^2}	$-2t$

En el caso de los polinómios de Jacobi.
Gegenbauer: $\alpha = \beta = -1/2$.
Legendre: $\alpha = \beta = 0$.
Chebyshev: $\alpha = \pm 1/2,\ \beta = \pm 1/2$.

Usando directamente la información de la tabla mostrada se puede verficar lo siguiente.

Lema 5.5.9. *Con las condiciones anteriores, tenemos que*

$$\lim_{t\to a^+} t^n A(t)w(t) = 0 \ y \ \lim_{t\to b^-} t^n A(t)w(t) = 0,\ n = 0, 1, \ldots$$

Teorema 5.5.10. *i) Sea* $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ *una familia de POC, entonces*

$$\left\{ \frac{dQ_n(t)}{dt} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

también forma una familia de POC.
ii) Para cada m *fijo, a familia* $\{Q_n^{(m)}\}_{n=m}^{\infty}$ *es ortogonal c.r.a*

$$w_m(t) := A^m(t)w(t).$$

Además $(A(t)w_m)' = B_m(t)w_m(t)$ *donde* $B_m(t) = A'(t)m + B(t)$.
Demostración. i) Sea $n > m$. Sabemos que

$$\langle t^{m-1}B(t), Q_n(t)\rangle_w = \int_a^b t^{m-1}B(t)Q_n(t)w(t)dt = 0.$$

Por otro lado, por (5.4) y el lema anterior,

$$\begin{aligned} \langle t^{m-1}B(t), Q_n(t)\rangle_w &= \int_a^b t^{m-1}Q_n(t)\frac{d}{dt}(A(t)w(t))dt \\ &= -(m-1)\langle t^{m-2}A(t), Q_n(t)\rangle_w - \langle t^{m-1}A(t), Q_n'(t)\rangle_w. \end{aligned}$$

Como $m < n$, $\langle t^{m-2}A(t), Q_n(t)\rangle_w = 0$, luego

$$\langle t^{m-1}A(t), Q_n'(t)\rangle_w = \langle t^{m-1}, Q_n'(t)\rangle_{Aw} = 0.$$

Esto implica que los polinómios $Q_1'(t), Q_2'(t), \ldots$ son ortogonales c.r.a $w_1(t) := A(t)w(t)$. Además

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(A(t)w_1(t)) &= A'(t)w_1(t) + A(t)\frac{d}{dt}(A(t)w(t)) \\ &= A'(t)w_1(t) + A(t)B(t)w(t) = B_1(t)w_1(t), \end{aligned}$$

donde $B_1(t) := A'(t) + B(t)$. Por lo que se cumple (5.3).
Para ii) se puede repetir el proceso en i). $\square$

Teorema 5.5.11. *Una familia de POC $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ c.r.a w son solución de la EDO*

$$A(t)x''(t) + B(t)x'(t) - \lambda_n x(t) = 0$$

donde $\lambda_n := n(\frac{1}{2}(n-1)A''(0) + B'(0))$, y A y B cumplen (5.3).

Demostración. Por el teorema anterior $\langle Q_n'(t), t^{m-1}\rangle_{Aw} = 0$ cuando $m < n$. Pero usando integración por partes

$$\langle Q_n'(t), t^{m-1}\rangle_{Aw} = -\frac{1}{m}\int_a^b t^m \frac{d}{dt}(A(t)Q_n'(t)w(t))dt = -\frac{1}{m}\langle \widehat{Q}_n(t), t^m\rangle_w,$$

donde $\widehat{Q}_n(t) := A(t)Q_n''(t) + B(t)Q_n'(t)$. Lo anterior dice que el polinómio $\widehat{Q}_n(t)$ de grado n es ortogonal a los polinomios de grado menor a n. Esto implica que $\widehat{Q}_n(t) \in \langle\{Q_n(t)\}\rangle$, es decir $\widehat{Q}_n(t) = \lambda Q_n(t)$ para algún $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. Así, hay $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$A(t)Q_n''(t) + B(t)Q_n'(t) - \lambda_n Q_n(t) = 0$$

para todo $t \in (a,b)$. Comparando coeficientes de t^n tenemos que

$$\frac{A''(0)}{2}n(n-1) + B'(0)n - \lambda_n = 0.$$

□

Corolario 5.5.12. *Los eigenvalores de $Lx := Ax'' + Bx'$ son:*

P_n	L_n	H_n
$\lambda_n := n(n+\alpha+\beta+1)$	$\lambda_n := n$	$\lambda_n := 2n$

y los eigenvectores son los polinómios correspondientes.

Finalmente tenemos el siguiente teorema que usa los resultados anteriores.

Teorema 5.5.13. *i) Para $m = 0, 1, \ldots$ fijo, los POC $\{Q_n^{(m)}(t)\}_{n=m}^{\infty}$ satisfacen que*

$$\frac{d}{dt}\left(A(t)w_m(t)\frac{d}{dt}Q_n^{(m)}(t)\right) = \lambda_{n,m}w_m(t)Q_n^{(m)}(t),\ n = m, m+1, \ldots$$

donde $\lambda_{n,m} = (n-m)(\frac{1}{2}(n+m-1)A''(0) + B'(0))$ y $w_0 = w$.
*ii) (**fórmula del tipo Rodrigues**) Los POC $\{Q_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ se pueden expresar como*

$$Q_n(t) = \frac{c_n}{w(t)}\frac{d^n}{dt^n}(A^n(t)w(t)),\ n = 0, 1, \ldots$$

Demostración.
i) De los dos teoremas anteriores llegamos al resultado usando

$$\lambda_{n,m} = (n-m)\left(\frac{1}{2}(n-m-1)A''(0) + mA''(0) + B'(0)\right).$$

ii) Se obtiene al aplicar sucesivamente el punto i); notemos que

$$\frac{d^n}{dt^n} Q_n(t) \neq 0.$$

$\square$

Usualmente se consideran

$$c_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \text{ para } P_n, \ c_n = \frac{1}{n!} \text{ para } L_n \text{ y } c_n = (-1)^n \text{ para } H_n.$$

Ejercicios

5.5.1. Demuestre la fórmula del tipo Rodrigues para los POC.

5.5.2. Dé un conjunto de eigenvalores y eigenvectores para el operador

$$(Tx)t := (1-t^2)x''(t) - tx'(t) \text{ con } t \in [-1,1].$$

5.5.3. Sean $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ una familia de polinomios ortogonales. A la función

$$F(s,t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n(s)}{n!} t^n$$

se le llama la función generadora de los polinomios. Demuestre, para los polinomios de Hermite $Q_n := H_n$ con constante $c_n := (-1)^n$ en la fórmula de Rodrigues, la identidad $F(s,t) = \exp(2st - t^2)$.

5.5.4. Exprese la siguiente ecuación como una del problema de Sturm-Liouville,

$$tx''(t) + (1-t)x'(t) + \lambda x(t) = 0 \text{ con } \ t \geq 0 \text{ y } \lambda \in \mathbb{R}.$$

5.5.5. Describa los eigenvalores y las eigenfunciones del operador

$$[Lx]t := x''(t) - 2tx'(t), \ t \in \mathbb{R}.$$

Calcule explícitamente las primeras 3 eigenfunciones.

Bibliografía

[1] Braun, M. (1993). *Differential Equations and Their Applications* (4th edition). Springer.

[2] Cheney, W. (2001). *Analysis for Applied Mathematics*. Springer.

[3] Coddington, E.A. and Levinson, N. (1955). *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill.

[4] González-Velasco, E.A. (1995). *Fourier Analysis and Boundary Value Problems*. Academic Press.

[5] Kress, R. (1999). *Linear Integral Equations* (2nd edition). Springer.

[6] Kress, R. (1998). *Numerical Analysis*. Springer.

[7] Pinchover, Y. and Rubinstein, J. (2005). *Introduction to Partial Differential Equations*. Cambrigde.

Índice